

Base d'analyse fonctionnelle
Master 1 UPMC
MM005

22 Octobre 2010

1) Soit μ une mesure positive sur l'espace mesurable (X, \mathcal{M}) et $u := (u_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables. Le but de cet exercice est de montrer le "biting lemma": il existe une sous-suite $(u_{m_q})_{q \geq 1}$ de $(u_n)_{n \geq 1}$ et une suite décroissante $(A_q)_{q \geq 1}$ dans \mathcal{M} avec $\mu(A_q) \rightarrow 0$ tel que la suite $(\chi_{A_q^c} u_{m_q})_{q \geq 1}$ soit équi-intégrable. Ici, $\chi_{A_q^c}$ désigne la fonction caractéristique du complémentaire de A_q dans X .

a) On définit $\eta(u)$ le module d'uniforme intégrabilité de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par

$$\eta(u) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \int_A |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N}, \mu(A) \leq \varepsilon \right\}.$$

Montrer que

$$\eta(u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \int_{|u_n| > t} |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Indication. On posera

$$\tilde{\eta}(u) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \int_{|u_n| > t} |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N} \right\}$$

et pour montrer l'inégalité $\tilde{\eta}(u) \leq \eta(u)$, on utilisera l'*inégalité de Markov* : pour $t > 0$,

$$\mu(\{|u_n| > t\}) \leq t^{-1} \int_{|u_n| > t} |u_n| d\mu.$$

b) On définit pour $i \in \mathbb{N}$,

$$g_i(t) := \sup_{n \geq i} \int_{|u_n| > t} |u_n| d\mu.$$

Montrer qu'il existe une suite croissante $(t_q)_{q \geq 1}$ qui tend vers l'infini telle que pour tout $q \geq 1$, $g_0(t_q) \leq \eta(u) + 1/q$.

c) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g_i(t)$ converge vers $\eta(u)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Indication. On pourra utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

d) Montrer qu'il existe une suite croissante $(m_q)_{q \geq 1}$ telle que

$$\int_{|u_{m_q}| > t_q} |u_{m_q}| d\mu \geq \eta(u) - 1/q.$$

e) Soit $A_q := \{|u_{m_q}| > t_q\}$. Montrer que $\mu(A_q) \rightarrow 0$.

f) Soit

$$g(t) := \sup_{q \in \mathbb{N}} \int_{A_q^c \cap \{|u_{m_q}| > t\}} |u_{m_q}| d\mu.$$

Montrer que $g(t_j)$ tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$.

g) Conclure la preuve du “biting lemma”.

2) Soit E un espace de Banach. On désigne par $c_0(E)$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. On muni $c_0(E)$ de la norme

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \geq 0} \|x_n\|_E.$$

Montrer que $c_0(E)$ est complet.

3) Soit X un espace vectoriel normé, F un espace de Banach et $f : X \rightarrow F$ une application linéaire, continue et injective. On désigne par B_X la boule unité fermée de X . Montrer que si $f(B_X)$ est fermé dans F , alors X est complet.

Indication: On pourra utiliser les ensembles fermés $f(\alpha B_X)$ pour divers $\alpha > 0$.