Base d'analyse fonctionnelle
Master 1 UPMC
MM005

22 Octobre 2010

1) Soit μ une mesure positive sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et $u := (u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables. Le but de cet exercice est de montrer le "biting lemma": il existe une sous-suite $(u_{m_q})_{q\geqslant 1}$ de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite décroissante $(A_q)_{q\geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ avec $\mu(A_q) \to 0$ telles que la suite $(\chi_{A_q^c}\, u_{m_q})_{q\geqslant 1}$ soit équi-intégrable. Ici, $\chi_{A_q^c}$ désigne la fonction caractéristique du complémentaire de A_q dans X.

a) On définit $\eta(u)$ le module d'uniforme intégrabilité de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$\eta(u) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \left\{ \int_A |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N},\ \mu(A) \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Montrer que

$$\eta(u) = \lim_{t \to +\infty} \sup \left\{ \int_{|u_n|>t} |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

<u>Indication</u>. On posera

$$\tilde{\eta}(u) := \lim_{t \to +\infty} \sup \left\{ \int_{|u_n|>t} |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N} \right\}$$

et pour montrer l'inégalité $\tilde{\eta}(u) \leqslant \eta(u)$, on utilisera l'*inégalité de Markov* : pour $t > 0$,

$$\mu(\{|u_n| > t\}) \leqslant t^{-1} \int_{|u_n|>t} |u_n| d\mu.$$

Démonstration. On introduit les quantités suivantes :

$$\eta(u, \varepsilon) := \sup \left\{ \int_A |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N},\ A \in \mathcal{M} \text{ avec } \mu(A) \leqslant \varepsilon \right\},$$

$$\tilde{\eta}(u, t) := \sup \left\{ \int_{|u_n|>t} |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N} \right\},$$

et

$$\tilde{\eta}(u) := \lim_{t \to +\infty} \tilde{\eta}(u, t).$$

On remarque que $\tilde{\eta}(u,t)$ décroit lorsque t tend vers l'infini et $\eta(u, \varepsilon)$ décroit lorsque ε tend vers 0, donc les limites dans les définitions de $\eta(u)$ et $\tilde{\eta}(u)$ sont des inf. En particulier, pour chaque $\delta > 0$, il existe $t > 0$ tel que $\tilde{\eta}(u,t) \leqslant \tilde{\eta}(u) + \delta$. Alors, pour tout n et tout $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) \leqslant \delta/t$, on a

$$\int_A |u_n| d\mu = \int_{A \cap \{|u_n|>t\}} |u_n| d\mu + \int_{A \cap \{|u_n| \leqslant t\}} |u_n| d\mu \leqslant \tilde{\eta}(u,t) + t\mu(A) \leqslant \tilde{\eta}(u) + 2\delta.$$

On en déduit que $\eta(u) \leqslant \eta(u, \delta/t) \leqslant \tilde{\eta}(u) + 2\delta$ et donc $\eta(u) \leqslant \tilde{\eta}(u)$, en faisant δ tendre vers zéro.

Pour établir l'autre l'inégalité, on observe qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\eta(u, \varepsilon) \leqslant \eta(u) + \delta$. En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient

$$\mu(\{|u_n| > t\}) \leqslant t^{-1} \int_{|u_n|>t} |u_n| d\mu \leqslant t^{-1} M,$$

où $M := \sup\{\int_X |u_n| d\mu : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Alors $\tilde{\eta}(u) \leqslant \tilde{\eta}(u, M/\varepsilon) \leqslant \eta(u, \varepsilon) \leqslant \eta(u) + \delta$, ce qui implique $\tilde{\eta}(u) \leqslant \eta(u)$ en faisant $\delta \to 0$.

b) On définit pour $i \in \mathbb{N}$,

$$g_i(t) := \sup_{n \geqslant i} \int_{|u_n|>t} |u_n| d\mu.$$

Montrer qu'il existe une suite croissante $(t_q)_{q \geqslant 1}$ qui tend vers l'infini et telle que pour tout $q \geqslant 1$, on a $g_0(t_q) \leqslant \eta(u) + 1/q$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer un argument de récurrence, en tenant compte du fait que $\eta(u)$ est un l'inf des $\eta(u, t) = g_0(t)$ lorsque $t > 0$.

c) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g_i(t)$ converge vers $\eta(u)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Indication. On pourra utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la famille finie de fonctions de L^1, $\{u_1, ..., u_{i-1}\}$, est équi-integrable.

d) Montrer qu'il existe une suite croissante $(m_q)_{q \geqslant 1}$ telle que

$$\int_{|u_{m_q}|>t_q} |u_{m_q}| d\mu \geqslant \eta(u) - 1/q.$$

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g_i(t)$ décroit en t, donc pour tout $q \geqslant 1$, $g_i(t_q) \geqslant \eta(u)$. D'après la définition de $g_i(t_q)$, il existe m_q tel que

$$\int_{|u_{m_q}|>t_q} |u_{m_q}| d\mu \geqslant \eta(u) - 1/q.$$

Par récurrence en q, on peut choisir une suite croissante $(m_q)_{q \geqslant 1}$.

e) Soit $A_q := \{|u_{m_q}| > t_q\}$. Montrer que $\mu(A_q) \to 0$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser à nouveau l'inégalité de Markov et remarquer que $(t_q)_{q \geqslant 1}$ diverge.

f) Soit

$$g(t) := \sup_{q \in \mathbb{N}} \int_{A_q^c \cap \{|u_{m_q}|>t\}} |u_{m_q}| d\mu.$$

Montrer que $g(t_j)$ tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$.

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} g(t_j) &= \sup_{q>j} \int_{\{t_j<|u_{m_q}|\leqslant t_q\}} |u_{m_q}|d\mu \\ &= \sup_{q>j} \Big(\int_{\{|u_{m_q}|>t_j\}} |u_{m_q}|d\mu - \int_{\{|u_{m_q}|>t_q\}} |u_{m_q}|d\mu \Big) \\ &\leqslant \sup_{q>j} \Big(g_0(t_j) - \int_{\{|u_{m_q}|>t_q\}} |u_{m_q}|d\mu \Big) \\ &\leqslant \sup_{q>j} \Big(\eta(u) + 1/j - (\eta(u) - 1/q) \Big) \\ &\leqslant 2/j \end{aligned}$$

qui converge vers zéro.

g) Conclure la preuve du “biting lemma”.

Démonstration. Comme g décroît en t et $(t_j)_{j\geqslant 1}$ tend vers l'infini, la question précédente montre que

$$g(t) \to 0 \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

La conclusion suit car on a dit qu'une suite $v := (v_q)_q$ est équi-intégrable si et seulement si $\eta(v) = 0$, ce qui est satisfait par la suite définie par $v_q := \chi_{A_q^c}\, u_{m_q}$.

2) Soit E un espace de Banach. On désigne par $c_0(E)$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. On munit $c_0(E)$ de la norme

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 0} \|x_n\|_E.$$

Montrer que $c_0(E)$ est complet.

Démonstration. Soit $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ de Cauchy dans $c_0(E)$. Pour tout $j \geqslant 0$, on a

$$\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|_E \leqslant \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty,$$

donc $(x_j^{(n)})_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans E. Par conséquent, $(x_j^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers un certain $x_j \in E$.

Montrons que $x := (x_j)_{j\geqslant 0}$ appartient à $c_0(E)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty < \varepsilon/3$, $\forall n, m \geqslant N$. En particulier, $\|x_j^{(n)} - x_j^{(N)}\|_E \leqslant \varepsilon/3$ ce qui implique, après passage à la limite quand $n \to \infty$, que $\|x_j - x_j^{(N)}\|_E \leqslant \varepsilon/3$. Comme $x^{(N)} \in c_0(E)$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_j^{(N)}\|_E < \varepsilon/3$, $\forall j \geqslant J$. Par l'inégalité de Minkowski, on a $\|x_j\|_E \leqslant 2\varepsilon/3 < \varepsilon$, $\forall j \geqslant J$, ce qui implique que $x \in c_0(E)$.

Montrons enfin que $\|x - x^{(m)}\| \to 0$ lorsque $m \to \infty$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$, $\forall n, m \geqslant N$. Alors, pour tout $J \in \mathbb{N}$ on a

$$\sup_{j\leqslant J} \|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|_E < \varepsilon,$$

ce qui entraîne, en faisant $n \to \infty$, que

$$\sup_{j\leqslant J} \|x_j - x_j^{(m)}\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Puisque J est quelconque, on obtient $\|x - x^{(m)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

3) Soit X un espace vectoriel normé, F un espace de Banach et $f : X \to F$ une application linéaire, continue et injective. On désigne par B_X la boule unité fermée de X. Montrer que si $f(B_X)$ est fermé dans F, alors X est complet.

Indication: On pourra utiliser les ensembles fermés $f(\alpha B_X)$ pour divers $\alpha > 0$.

Démonstration. On remarque que pour tout $C > 0$, $f(CB_X) = Cf(B_X)$ est fermé dans F. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans X, donc elle est bornée : $\|x_n\|_X \leqslant M$, $\forall n \geqslant 0$. Puisque f est continu, $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans F (complet), donc $f(x_n) \to y \in F$. Mais la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ est contenue dans $f(MB_X)$ donc $y \in f(MB_X)$. Il existe donc $x \in MB_X \subset X$ tel que $y = f(x)$. Il faut ensuite montrer que $x_n \to x$ dans X. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N.$$

Ceci implique que $(x_n - x_m)_{n\geqslant N}$ appartient à εB_X et $f(x_n) - f(x_m) \to f(x) - f(x_m)$ lorsque $n \to \infty$ dans $f(\varepsilon B_X)$. On en déduit que $f(x - x_m) = f(z_m)$ pour un certain $z_m \in \varepsilon B_X$. Comme f est injective, $z_m = x - x_m$ et on a montré que $\|x - x_m\|_X = \|z_m\|_X \leqslant \varepsilon$ lorsque $m \geqslant N$.