

### Exercice 1

On désigne par  $I$  l'intervalle  $[0, 1]$  de la droite réelle et par  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha < 1$ .

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $v \in L^2(I, \mathbb{R})$  et une sous-suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2(I, \mathbb{R})$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- Construire une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I, \mathbb{R})$  qui converge fortement vers 0 dans  $L^1(I, \mathbb{R})$  mais qui ne converge pas presque partout vers 0.
- Soient  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g_* \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g^* \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $g_n \rightarrow g_*$  dans  $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g_n \rightarrow g^*$  dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Démontrer que  $g_* = g^* \in L^1 \cap L^2$ .

### Exercice 2

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel. On désigne par  $\mathcal{K}(H)$  l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de  $H$  dans  $H$ , autrement dit,

$$\mathcal{K}(H) = \{T \in \mathcal{L}(H, H), \text{ t.q. } T(B(0, 1)) \text{ est d'adhérence compacte dans } H\},$$

où  $B(0, 1)$  désigne la boule unité centrée à l'origine de  $H$ .

- Rappeler la définition de la norme d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H, H)$ . On la note  $\|\cdot\|$  dans la suite.
- Montrer que si  $T$  et  $S$  appartiennent à  $\mathcal{L}(H, H)$  alors  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ .
- Montrer que tout opérateur  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  de rang fini, c'est-à-dire dont l'image est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $H$ , appartient à  $\mathcal{K}(H)$ .
- Montrer que  $\mathcal{K}(H)$  est fermé dans  $\mathcal{L}(H, H)$  pour la norme des opérateurs.
- Montrer que pour tout opérateur  $T \in \mathcal{K}(H)$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous-espace vectoriel  $X_n \subset H$  de dimension finie tel que

$$\|T - (P_n \circ T)\| \leq \varepsilon,$$

où  $P_n$  désigne la projection orthogonale sur  $X_n$ .

*Indication : Approcher  $T(B(0, 1))$  par un réseau de points bien choisis et considérer l'espace vectoriel engendré par ceux-ci.*

- En déduire que la composée de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{12} & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{x^3}{3} & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{1}{12} & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Esquisser le graphe de  $f$ .

- b. Montrer que  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et même que  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .
- c. Calculer les dérivées première, seconde et troisième de  $f$  au sens des distributions. On les note respectivement  $g$  et  $h$  et  $j$ .
- d. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on désigne par  $\delta_a$  la distribution de Dirac centrée au point  $a$ , autrement dit

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Déterminer  $\mathcal{F}(\delta_0)$ , et ensuite  $\mathcal{F}(\delta_a)$ .

- e. Calculer la transformée de Fourier de  $j$ , et en déduire la transformée de Fourier de  $f$ .