

Base d'Analyse Fonctionnelle
Master 1 UPMC
MM005

17 Mai 2011

Tous les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. En particulier, lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.

1)

1. Énoncer le théorème de point fixe de Banach-Picard pour les applications contractantes.
2. Donner la définition d'une suite de fonctions équi-intégrable.
3. Donner la définition d'une mesure de Radon positive et énoncer le Théorème de représentation de Riesz.
4. Énoncer le Théorème de Riesz - Fréchet - Kolmogorov sur la compacité dans les espaces de Lebesgue.

2) Dans cet exercice on note H l'espace de Banach $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la norme

$$\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

On définit pour f dans H et $x \in [0, 1]$,

$$Vf(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

On note V l'opérateur qui à chaque f associe Vf défini par la formule ci-dessus.

1. Montrer que V est linéaire et continu de H dans H .
2. Utiliser le Théorème d'Ascoli pour montrer que l'opérateur V est compact.
3. Montrer que V ne possède aucune valeur propre.

Correction.

1. On considère deux fonctions f et g de H , deux nombres réels a et b . Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$V(af + bg)(x) = \int_0^x (af + bg)(t) dt = a \int_0^x f(t) dt + b \int_0^x g(t) dt = aV(f)(x) + bV(g)(x).$$

Donc V est linéaire. De plus, pour chaque $x \in [0, 1]$,

$$|Vf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\| dt \leq \int_0^1 \|f\| dt = \|f\|.$$

Par conséquent, $\|Vf\| \leq \|f\|$ ce qui implique que V est continu de H dans H .

2. On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ bornée dans H . Alors, la suite $(Vf_n)_n$ est bornée dans H et sa dérivée est bornée dans H . Ceci veut dire que la suite $(Vf_n)_n$ est équi-continue et le Théorème d'Ascoli peut s'appliquer. On obtient ainsi que la suite $(Vf_n)_n$ est relativement compacte. Ceci montre que l'opérateur V est compact.
3. Supposons que λ est une valeur propre de V associée au vecteur propre f . Alors, $Vf = \lambda f$. On distingue deux cas :
 - $\lambda = 0$. Alors, $Vf = 0$ et en dérivant cette expression on obtient $f = 0$, ce qui est impossible car f est un vecteur propre.
 - $\lambda \neq 0$. En dérivant l'expression $Vf = \lambda f$, on obtient $f' = \frac{1}{\lambda}f$ donc $f(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}$. Comme $f(0) = \frac{1}{\lambda}Vf(0) = 0$, on arrive à $C = 0$, ce qui donne $f = 0$.

3) Soit E un espace de Banach réel tel que l'identité du parallélogramme est satisfaite:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \forall u, v \in E. \quad (1)$$

Dans cet exercice on se propose de montrer que E est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2), \forall u, v \in E.$$

1. Montrer que $\langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = \frac{1}{2}\langle u_1 + u_2, 2v \rangle, \forall u_1, u_2, v \in E$. En déduire que $\langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = \langle u_1 + u_2, v \rangle, \forall u_1, u_2, v \in E$.

Indication. On pourra appliquer deux fois l'identité (1).

2. Montrer que $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{Q}$.

Indication. On pourra utiliser la question précédente et $\langle -u, v \rangle = -\langle u, v \rangle, \forall u, v \in E$.

3. Montrer la continuité de l'application $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle \lambda u, v \rangle - \lambda \langle u, v \rangle$ pour tout $u, v \in E$. En déduire que $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Correction.

1. Par définition

$$\langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u_1 + v\|^2 - \|u_1 - v\|^2 + \|u_2 + v\|^2 - \|u_2 - v\|^2).$$

D'après (1), on a

$$\|u_1 + v\|^2 + \|u_2 + v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u_1 + u_2 + 2v\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2)$$

et

$$\|u_1 - v\|^2 + \|u_2 - v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u_1 + u_2 - 2v\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2).$$

Par conséquent,

$$\langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = \frac{1}{8}(\|u_1 + u_2 + 2v\|^2 - \|u_1 + u_2 - 2v\|^2) = \frac{1}{2}\langle u_1 + u_2, 2v \rangle. \quad (2)$$

Si l'on fait $u_2 = 0$ dans (2) on a

$$2\langle u_1, v \rangle = \langle u_1, 2v \rangle, \forall u_1, v \in E.$$

Donc, (2) devient

$$\langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = \langle u_1 + u_2, v \rangle, \forall u_1, u_2, v \in E.$$

2. Soit $\lambda = \frac{m_1}{m_2}$ avec $m_1 \in \mathbb{Z}$ et $m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. D'après la question précédente et $\langle -u, v \rangle = -\langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in E$, on a $\langle nu, v \rangle = n\langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in E$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Donc,

$$\left\langle \frac{m_1}{m_2}u, v \right\rangle = m_1 \left\langle \frac{u}{m_2}, v \right\rangle = \frac{m_1}{m_2} \langle u, v \rangle$$

car $\langle u, v \rangle = \left\langle m_2 \frac{u}{m_2}, v \right\rangle$.

3. Le terme $\lambda \langle u, v \rangle$ est linéaire (donc continu) et $\langle \lambda u, v \rangle$ est continu par rapport à λ d'après la continuité de la norme et de la fonction carrée. Finalement, comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et l'application $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle \lambda u, v \rangle - \lambda \langle u, v \rangle$ est nulle sur \mathbb{Q} , elle est nulle sur tout \mathbb{R} .
4. Il est facile de voir que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. De plus,

$$\langle u, u \rangle = \frac{1}{4} \|2u\|^2 = \|u\|^2 \geq 0$$

et $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. Les questions 1. et 3. combinées avec la symétrie montrent que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire. Par conséquent, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace de Banach E , donc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

- 4) Soit $h \in S(\mathbb{R})$ (l'espace de Schwartz) une fonction paire à valeurs réelles telle que $\int_{\mathbb{R}} h^2 = 1$ et soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h(t - y) e^{-2\pi i x t} dt.$$

- Donner un exemple de fonction h qui vérifie les hypothèses ci-dessus.
- Soit F_y l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)h(t - y)$. Montrer que F_y appartient à $L^1(\mathbb{R})$. En déduire que φ est défini et borné sur \mathbb{R}^2 et que l'application $y \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x, y)$ est de classe C^∞ , qu'elle tend vers zéro lorsque $|y| \rightarrow +\infty$ et calculer sa dérivée.
- Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |h(t - y)|^2 dt.$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, y)|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt.$$

4. On suppose que f et $\mathcal{F}f$ (la transformée de Fourier de f) sont intégrables.

- Montrer que

$$\varphi(x, y) = e^{-2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(u) \mathcal{F}h(x - u) e^{2\pi i u y} du, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- En déduire que l'intégrale double

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v, y) h(x - y) e^{2\pi i x v} dv dy$$

coïncide avec $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction.

- $h(t) = e^{-\pi t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $F_y \in L^1(\mathbb{R})$, donc φ est bien défini. De plus,

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x, y)| \leq \|F_y\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

D'autre part, $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \varphi(x, y) = 0$ car $h \in S(\mathbb{R})$ et $\varphi(\cdot, x) \in C^\infty$ car le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique aisément grâce à $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ et au fait que $S(\mathbb{R})$ est stable par dérivation. Finalement,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = - \int_{\mathbb{R}} f(t) h'(t - y) e^{-2\pi i x t} dt.$$

3. On intègre par rapport à x dans l'expression de φ :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) h(t - y) e^{-2\pi i x t} dt \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}F_y(x)|^2 dx.$$

D'après l'identité de Plancherel, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, y)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |h(t - y)|^2 dt.$$

Pour obtenir la deuxième identité, on intègre par rapport à y la première identité:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, y)|^2 dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |h(t - y)|^2 dt dy = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |h(t - y)|^2 dy \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |h(u)|^2 du = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

4. • D'après l'expression de φ et la formule d'inversion de Fourier appliquée à f , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) h(t - y) e^{-2\pi i x t} dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u t} \mathcal{F}f(u) du \right) h(t - y) e^{-2\pi i x t} dt \\ &= e^{-2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u(t-y)} e^{2\pi i u y} \mathcal{F}f(u) du \right) h(t - y) e^{-2\pi i x(t-y)} dt. \end{aligned}$$

En appliquant Fubini ($\mathcal{F}f, h \in L^1(\mathbb{R})$), on a

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= e^{-2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(x-u)(t-y)} h(t - y) dt \right) e^{2\pi i u y} \mathcal{F}f(u) du \\ &= e^{-2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(x-u)t} h(t) dt \right) e^{2\pi i u y} \mathcal{F}f(u) du \\ &= e^{-2\pi i x y} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}h(x - u) e^{2\pi i u y} \mathcal{F}f(u) du. \end{aligned}$$

• Soit

$$A := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v, y) h(x - y) e^{2\pi i x v} dv dy.$$

D'après la question précédente, on a

$$A = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i v y} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(u) \mathcal{F}h(v - u) e^{2\pi i u y} du \right) h(x - y) e^{2\pi i x v} dv dy.$$

Comme $\mathcal{F}f, \mathcal{F}h, h \in L^1(\mathbb{R})$, l'application de Fubini est justifiée:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}h(v - u) e^{2\pi i(v-u)(x-y)} dv \right) e^{2\pi i u x} \mathcal{F}f(u) h(x - y) du dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}h(v) e^{2\pi i v(x-y)} dv \right) e^{2\pi i u x} \mathcal{F}f(u) h(x - y) du dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u x} \mathcal{F}f(u) |h(x - y)|^2 du dy, \end{aligned}$$

où dans la dernière identité on a utilisé la formule d'inversion de Fourier. En utilisant à nouveau la formule d'inversion, on obtient

$$A = \int_{\mathbb{R}} f(x) |h(x-y)|^2 dy = f(x) \int_{\mathbb{R}} |h(y)|^2 dy = f(x).$$