

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Approximation des EDP

Examen, 16 mai 2007

Durée 4 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Les exercices et le problème sont indépendants. Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Exercice 1

Soit T un triangle de sommets S^i , $i = 1, 2, 3$, du plan rapporté à un repère orthonormé Ox_1x_2 . On note H^i la projection orthogonale de S^i sur le côté opposé du triangle, $h_i = \|\overrightarrow{H^iS^i}\|$ la hauteur correspondante. Soient λ_i , $i = 1, 2, 3$, les coordonnées barycentriques associées au triangle T .

a. Montrer que la famille $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3\}$ forme une base de l'espace P_2 des fonctions polynomiales de degré total inférieur à 2.

b. Montrer que $\nabla\lambda_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \frac{1}{h_i}\overrightarrow{H^iS^i}$. En déduire les gradients des fonctions de la base exhibée au **a**.

c. On introduit les formes linéaires $\phi_i(P) = P(S^i)$ et $\psi_i(P) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(S^i)$, $i = 1, 2, 3$. Montrer que l'élément fini $(T, P_2, \{\phi_i, \psi_i\}_{i=1,\dots,3})$ est unisolvant si et seulement si aucun des côtés de T n'est parallèle à l'axe Ox_1 .

Exercice 2

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 . On considère la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\Omega} uv dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) d\sigma$$

et on se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, on a $A\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2$ où $\xi \cdot \zeta$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 et $|\xi|^2 = \xi \cdot \xi$.

b. Montrer que le problème variationnel : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0(v) d\sigma$$

Cet énoncé comporte trois pages. Ceci est la page 1

Université Pierre et Marie Curie - M1 Mathématiques

admet une solution et une seule.

c. En supposant que cette solution appartient à $H^2(\Omega)$, identifier le problème aux limites ainsi résolu.

Problème

On se place maintenant en dimension 1 avec $\Omega =]0, 1[$. On considère le problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (1+x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

avec u_0 donnée. On ne s'intéressera pas à la théorie d'existence pour ce problème et on admettra que u_0 est tel que la solution existe, est unique, et de classe C^2 en temps et C^4 en espace.

On va approcher ce problème par différences finies. Soit N, M deux entiers ≥ 1 destinés à tendre vers l'infini, $h = \frac{1}{N+1}$, $\Delta t = \frac{T}{M+1}$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$ et $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, M+1$.

On considère pour cela le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - (1+x_i) \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} = 0, \quad 1 \leq i \leq N,$$

et pour les conditions aux limites,

$$u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \quad \text{pour } j = 0, \dots, M+1$$

et la condition initiale

$$u_i^0 = u^0(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

On note $U^j \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes u_i^j , $i = 1, \dots, N$.

a. Écrire le schéma sous forme d'une récurrence vectorielle $U^{j+1} = \mathcal{A}_{h,\Delta t} U^j$. On fera intervenir dans la matrice $\mathcal{A}_{h,\Delta t}$, outre la matrice identité I_h de taille $N \times N$, les matrices $N \times N$ suivantes

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_h = \begin{pmatrix} 1+h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+2h & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2-h \end{pmatrix}$$

Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Approximation des EDP

et

$$B_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b.** Ce schéma est-il implicite ou explicite ?
- c.** Montrer que le schéma est consistant et donner son ordre en temps et en espace pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,h}$ (on rappelle que cette norme sur \mathbb{R}^N est donnée par $\|U\|_{\infty,h} = \max_{1 \leq i \leq N} |U_i|$ avec $h = \frac{1}{N+1}$).
- d.** Montrer que si $(2-h)\frac{2\Delta t}{h^2} \leq 1$ alors $\|\mathcal{A}_{h,\Delta t}\|_{\infty,h} = 1$. Que peut-on en déduire en termes de stabilité et de convergence ? (On rappelle que la norme matricielle subordonnée est donnée par $\|\mathcal{A}\|_{\infty,h} = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |\mathcal{A}_{ij}|$).