Université Pierre et Marie Curie - M1 Mathématiques

MM026 — Approximation des EDP

Examen 1ère session, 6 mai 2008

Durée 4 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

Soit T un triangle de sommets S^i, $i = 1,2,3$, M^i le milieu du côté opposé à S^i et G son centre de gravité. Soient λ_i, $i = 1,2,3$, les coordonnées barycentriques associées au triangle T.

a. Soit $\mathcal{P} = \text{vect}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2, \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel de dimension 7 tel que $P_2 \subset \mathcal{P} \subset P_3$.

b. On introduit les formes linéaires $\phi_i(P) = P(S^i)$, $i = 1,2,3$, $\phi_i(P) = P(M^i)$, $i = 4,5,6$, et $\phi_7(P) = P(G)$. Construire une base de $\mathcal{P}$ duale de cette famille de formes linéaires et en déduire que l'élément fini $\big(T, \mathcal{P}, \{\phi_i\}_{i=1,\dots,7}\big)$ est unisolvant.

c. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation d'un ouvert polygonal Ω de $\mathbb{R}^2$ possédant N_t triangles, N_s sommets internes et N_m milieux de côtés internes. On pose

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_{|T} \in \mathcal{P}; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

Montrer que tout élément de V_h est uniquement déterminé par la donnée de ses valeurs aux sommets internes, aux milieux des côtés internes et aux centres de gravité des triangles.

d. Réciproquement, montrer que pour tout jeu de valeurs en ces points, il existe un élément v_h de V_h qui prend ces valeurs en ces points (on montrera soigneusement la continuité de v_h). En déduire une base de V_h construite à l'aide de l'élément fini précédent, et la dimension de cet espace.

e. En supposant que l'on cherche à approcher la solution u d'un problème variationnel posé sur $V = H_0^1(\Omega)$ faisant intervenir une forme bilinéaire a continue et V-elliptique, et une forme linéaire continue ℓ, indiquer **brièvement** comment utiliser l'espace V_h et la base construite précédemment pour se ramener à un système linéaire (il s'agit d'une question de cours, il est donc **tout à fait inutile** d'en mettre plusieurs pages).

Problème

Partie 1

On considère l'équation de Black et Scholes suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)+\mu x\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)-rv(x,t)=0 \text{ dans } \mathbb{R}_+\times[0,T], \qquad (1)$$

avec la condition finale

$$v(x,T)=(x-K)_+, \qquad (2)$$

où σ, μ, r, K et T sont de constantes positives données (la notation $a_+=\max(a,0)$ désigne la partie positive de a).

a. On pose $u(y,s)=e^{rs}v(e^{\sigma y},T-s)$. Montrer que u est solution du problème :

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ dans } \mathbb{R}\times[0,T], \qquad (3)$$

avec la condition initiale

$$u(y,0)=u_0(y), \qquad (4)$$

où $u_0(y)=(e^{\sigma y}-K)_+$ et $c=\frac{\sigma}{2}-\frac{\mu}{\sigma}$.

b. Montrer que pour $u\in H^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}}u\frac{\partial u}{\partial y}\,dy=0$ (*Indication :* dans le cas de $\mathbb{R}$, on admettra que $H^1(\mathbb{R})=H^1_0(\mathbb{R})=\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$).

c. Montrer que toute solution u de (3)-(4) qui est de classe $C^1([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ (pour une donnée initiale qui n'est pas nécessairement celle indiquée plus haut) est telle que la quantité $E(s)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}u^2(y,s)\,dy$ décroît avec s.

d. En déduire l'unicité de la solution dans cette classe. La condition initiale particulière $u_0(y)=(e^{\sigma y}-K)_+$ est-elle compatible avec ce résultat ?

Partie 2

On se place à partir de maintenant sur un ouvert borné $y\in\Omega=]0,1[$. On complète le problème de Black et Scholes (3)-(4) par une condition aux limites de Dirichlet

$$u(0,s)=(1-K)_+,\quad u(1,s)=(e^{\sigma}-K)_+. \qquad (5)$$

Pour faire plus court, on notera $\alpha=(1-K)_+$ et $\beta=(e^{\sigma}-K)_+$.

On ne s'intéressera pas à la théorie d'existence pour ce problème et on admettra que la solution existe, est unique, et de classe C^2 en temps s et C^4 en espace y.

On va approcher ce problème par différences finies. Soit N,M deux entiers ≥ 1 destinés à tendre vers l'infini, $h=\frac{1}{N+1}$, $\Delta s=\frac{T}{M+1}$, $y_i=ih$, $i=0,\dots,N+1$ et $s_j=j\Delta s$, $j=0,\dots,M+1$.

On considère pour cela le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta s}-\frac{1}{2}\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}+c\frac{u_{i+1}^j-u_{i-1}^j}{2h}=0,\ 1\leq i\leq N,$$

et pour les conditions aux limites,

$$u_0^j=\alpha,\quad u_{N+1}^j=\beta,\ \text{pour } j=0,\dots,M+1$$

et la condition initiale

$$u_i^0=u^0(y_i),\ i=1,\dots,N.$$

On note $U^j\in\mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes u_i^j, $i=1,\dots,N$.

a. Écrire le schéma sous forme d'une récurrence vectorielle

$$U^{j+1}=\mathcal{A}_hU^j+G^j$$

en explicitant la matrice $\mathcal{A}_h$ et le vecteur G^j. On fera intervenir, outre la matrice identité I_h de taille $N\times N$, les matrices $N\times N$ suivantes

$$A_h=\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&0\\-1&2&-1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&-1&2&-1\\0&\cdots&0&-1&2\end{pmatrix}\ \text{et}\ B_h=\begin{pmatrix}0&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&1&0&-1\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}.$$

b. Exprimer l'erreur de consistance de ce schéma

$$\varepsilon(u)_i^j=\frac{u(y_i,s_{j+1})-u(y_i,s_j)}{\Delta s}-\frac{1}{2}\frac{u(y_{i+1},s_j)-2u(y_i,s_j)+u(y_{i-1},s_j)}{h^2}+c\frac{u(y_{i+1},s_j)-u(y_{i-1},s_j)}{2h},$$

où u désigne une solution exacte du problème de classe C^4 en espace et C^2 en temps, en fonction de h, Δs, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$. En déduire l'ordre de ce schéma en temps et en espace pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,h}$ (on rappelle que la norme sur $\mathbb{R}^N$ dont il est question est $\|U\|_{\infty,h}=\max_{i=1,\dots,N}|U_i|$).

c. A partir de maintenant, on suppose sans perte de généralité que $c\geq 0$. Montrer que si $\frac{\Delta t}{h^2}\leq 1$, alors le schéma est stable en norme $\|\cdot\|_{\infty,h}$ pour h suffisamment petit. (*Indication :* on rappelle aussi que la norme matricielle subordonnée associée à cette norme est donnée par $|||\mathcal{A}|||_{\infty,h}=\max_i\sum_j|\mathcal{A}_{ij}|$).

d. On pose $e_i^j = u(y_i, s_j) - u_i^j$ et on note $E^j \in \mathbb{R}^N$ le vecteur de composantes e_i^j, $i = 1, \ldots, N$. Déduire de ce qui précède une majoration de l'erreur du schéma $\|E^j\|_{\infty,h}$ en fonction de h et Δs. Qu'en conclut-on ?

e. Exprimer le résultat du **d.** en termes de la solution v du problème initial (1)–(2) auquel on aura ajouté des conditions de Dirichlet adéquates.