Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques
MM026 Approximation des EDP

**Contrôle continu, 7 mars 2008**

Durée 3 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Pensez à éteindre vos portables et autres gadgets électroniques.

Soit $\Omega = ]0,1[$. On se donne une constante $\beta \geq 0$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note également $V = H_0^1(\Omega)$. On s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \beta \int_0^1 u(s)\,ds = f \text{ dans } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

## Partie I

**a.** Soit $u \in H^1(\Omega)$. Montrer que le terme $\int_0^1 u(s)\,ds$ est bien défini.

**b.** Soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solution du problème (1). Montrer que

$$\forall v \in V, \qquad a(u,v) = \ell(v), \tag{2}$$

où

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(s)v'(s)\,ds + \beta\Big(\int_0^1 u(s)\,ds\Big)\Big(\int_0^1 v(s)\,ds\Big)$$

et

$$\ell(v) = \int_0^1 f(s)v(s)\,ds.$$

**c.** Réciproquement, soit $u \in V$ solution du problème variationnel (2). Montrer que $u$ est solution du problème aux limites (1). Montrer que $u \in H^2(\Omega)$.

**d.** Montrer que le problème variationnel consistant à trouver $u \in V$ satisfaisant (2) admet une solution et une seule.

**e.** Calculer explicitement $u$ dans le cas $f = 1$.

**f.** Revenant au cas général, $f \in L^2(0,1)$ quelconque, que faudrait-il modifier dans le problème variationnel (2) (espace fonctionnel ? norme ? forme bilinéaire ? forme linéaire ?) pour résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) + \beta \int_0^1 u(s)\,ds = f \text{ dans } \Omega, \\ u(0) = 0, u(1) + u'(1) = \gamma, \end{cases} \tag{3}$$

où $\gamma$ est une autre constante donnée (on demande simplement la liste des modifications avec une indication succincte de la raison de cette modification sans refaire les raisonnements en entier, ce qui constituerait une perte de temps...).

**Partie II**

On considère le même problème variationnel (2), sous l'angle de l'approximation numérique par éléments finis. On se donne un entier $N \geq 1$, on pose $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Soit

$$V_h = \{v_h \in C^0([0,1]), v_{h|[x_i,x_{i+1}]} \in P_1, v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

**a.** Montrer que le problème variationnel : trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$, admet une solution et une seule.

**b.** Déterminer une base de $V_h$ formée de fonctions-chapeaux.

**c.** Calculer explicitement la matrice $A_h$ et le second membre du système linéaire associé au problème précédent dans ce choix de base pour $f = 1$. Montrer que la matrice $A_h$ est inversible.

**d.** A votre avis, existe-t-il un choix de base de $V_h$ dans laquelle la matrice associée au problème approché serait creuse ?

**e.** A partir de maintenant, on suppose $f$ continue sur $[0,1]$. Montrer que $u \in C^2([0,1])$.

**f.** Soit $\Pi_h u$ le $V_h$-interpolé de $u$ (*i.e.*, l'unique élément de $V_h$ qui prend les mêmes valeurs que $u$ aux nœuds $x_i$ du maillage). Montrer que

$$|u - \Pi_h u|_{1,\Omega} \leq \max_{x \in [0,1]} |u''(x)| h.$$

**g.** En déduire l'estimation d'erreur

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C \max_{x \in [0,1]} |u''(x)| h$$

où la constante $C$ ne dépend ni de $u$, ni de $h$.