Présentation du travail de thèse et de post-doctorat

Evelyne Miot

24/03/10

1 Résumé de la thèse

Les problèmes étudiés dans ma thèse ont trait à la dynamique des points vortex dans deux équations pour les fluides ou superfluides en dimension deux ; d'une part, l'équation d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0 \tag{1.1}$$

et d'autre part, l'équation de Ginzburg-Landau complexe

$$(\kappa + i)\partial_t u = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2) \tag{1.2}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre et où $\kappa \geq 0$, plus communément nommée équation de Gross-Pitaevskii lorsque $\kappa = 0$. Dans les deux cas, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Pour chacune de ces équations, qui présentent de nombreuses similitudes, je me suis intéressée à des régimes où le champ u comporte, directement ou dans une asymptotique à petit paramètre, des singularités appelées points vortex. La présence de ces points vortex est décelée par la notion de *vorticité*, définie par $\operatorname{rot}(u)$ pour les fluides (équation d'Euler) et par $\frac{1}{2}\operatorname{rot}(u \times \nabla u)$ pour les superfluides (équation de Ginzburg-Landau complexe). Dans ces régimes, la vorticité est proche, en un sens plus ou moins fort, d'une somme finie de masses de Dirac

$$\omega(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)}, \tag{1.3}$$

affectées de coefficients d_i appelés intensités ou degrés suivant les cas, ou de la superposition d'une telle configuration à une partie plus régulière

$$\omega(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)} + \omega_{\mathrm{reg}}(t). \tag{1.4}$$

L'une des questions abordées consiste en la justification de l'existence d'un système limite pour les points vortex $z_i(t)$ ainsi que pour la partie régulière $\omega_{\mathrm{reg}}(t)$, l'autre en l'analyse de ce système limite.

La première partie de ma thèse, correspondant à [13] et [15] résumés ci-après, est consacrée à l'étude d'un système limite d'équations pour les points z_i et la partie ω_{reg} dans l'équation d'Euler. Un deuxième travail [21] porte sur l'existence d'un système limite pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe lorsque $\omega_{\text{reg}} \equiv 0$. Dans le but d'autoriser à l'avenir des données moins bien préparées, j'ai enfin examiné dans [22] un régime asymptotique sans vortex dans lequel les solutions de (1.2) sont de petites perturbations de champs de module égal à un.

Le système Euler-points vortex

Dans l'asymptotique décrite par (1.3), le système d'équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution des points vortex tant que ceux-ci ne s'intersectent pas est donné par la loi de Kirchhoff :

$$d_i \dot{z}_i = \frac{1}{2\pi} \nabla_{z_i}^{\perp} W(z_1, \ldots, z_l), \quad i = 1, \ldots, l,$$

où W est l'hamiltonien

$$W(z_1, \ldots, z_l) = -\sum_{j \neq k} d_j d_k \ln |z_j - z_k|.$$

Afin de décrire la dynamique d'une vorticité (ici également nommée tourbillon) se comportant selon (1.4), Marchioro et Pulvirenti [17, 18] ont introduit le système couplé dit système mixte Euler-points vortex

$$\begin{cases} \partial_t \omega_{\text{reg}} + (K * \omega) \cdot \nabla \omega_{\text{reg}} = 0 \\ \dot{z}_i = (K * \omega_{\text{reg}})(t, z_i) + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{d_i} \nabla_{z_i}^{\perp} W(z_1, \ldots, z_l), \end{cases} \tag{1.5}$$

avec $\omega_{\text{reg}} \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, où $\omega(t) = \sum d_i \delta_{z_i(t)} + \omega_{\text{reg}}(t)$ et où $K(x) = x^\perp/(2\pi|x|^2)$ désigne le noyau de Biot-Savart. L'existence globale d'une solution pour ce système est assurée dès que toutes les intensités d_i sont de même signe [17]. En outre, [17] fournit un résultat affirmatif d'unicité lorsque le support de ω_{reg} est initialement disjoint des points vortex, et énonce un résultat affirmatif, avec esquisse de preuve, lorsque ω_{reg} est initialement constante dans un voisinage de ces points.

La pertinence du système des points vortex d'une part, et du système mixte d'autre part, pour décrire les situations (1.3) et (1.4) a été établie de manière rigoureuse dans [17, 27]. La signification donnée dans ce cadre à « $\simeq$ » est celle de la convergence faible au sens de la mesure lorsqu'un paramètre ε tend vers zéro. Plus précisément, si l'un ou l'autre régime (1.3) ou (1.4) est observé initialement, alors il en est de même à $t > 0$ et les points vortex vérifient la loi de Kirchhoff ou le système mixte[a]. Ces résultats nécessitent toutefois des hypothèses supplémentaires de « très bonne préparation » des données initiales $\omega_\varepsilon(0)$ vérifiant (1.3) ou (1.4). Un exemple standard de telles données est celui formé par les superpositions de fonctions caractéristiques correctement pondérées de boules de rayon ε centrées en les z_i (poches de tourbillon).

Formulations lagrangienne et eulérienne pour le système mixte. Dans (1.5), l'évolution de ω_{reg} est décrite par une équation de transport. Au moins formellement, on peut également l'exprimer en termes de caractéristiques : la solution ω_{reg} régulière est constante

[a] Du moins jusqu'au premier temps de collision entre les points vortex.

le long des trajectoires qui sont solutions de l'e.d.o. $\dot{X} = (K * \omega)(t, X)$. Dans un travail en commun avec C. Lacave [13], nous avons démontré que cette formulation est effectivement équivalente à la formulation faible en termes d'e.d.p. dès que le tourbillon ω_{reg} est borné et intégrable. Dans ce but, nous nous sommes appuyés sur les travaux de DiPerna et Lions [10] à propos des équations de transport linéaires avec champs de vitesse peu réguliers, et notamment sur la notion clé de *solution renormalisée*. En raison de la partie très singulière créée par les points vortex dans le champ de vitesse total $K * \omega$, les résultats de DiPerna et Lions ne s'appliquent pas directement à notre cadre, et il nous a fallu exploiter la forme explicite bien particulière de cette composante singulière additionnelle.

Unicité pour le système mixte. Par ailleurs, nous avons établi dans [13] l'unicité de la solution pour le système (1.5) lorsque la composante bornée ω_{reg} du tourbillon est initialement constante au voisinage des points vortex. Nous avons tiré profit de l'équation satisfaite par le champ de vitesse $v = K * \omega_{\text{reg}}$ au sens faible afin d'établir des estimations d'énergie, en utilisant notamment l'harmonicité de la différence des vitesses de deux solutions au voisinage des points vortex.

Évolution en temps grand du support du tourbillon. Une autre partie de mon étude du système mixte Euler-points vortex concerne la question de l'expansion du support du tourbillon lorsque celui-ci est initialement à support compact et *de signe constant*. Dans le cas purement borné (sans point vortex), le support d'un tourbillon de signe quelconque croît au plus linéairement en temps puisque le champ de vitesse est uniformément borné. Cette estimation a priori est considérablement améliorée pour un tourbillon de signe fixe, grâce au caractère constant de quantités fondamentales liées à l'équation d'Euler : centre d'inertie et moment angulaire

$$c_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^2} x\omega(t,x)\,dx, \quad i_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2\omega(t,x)\,dx.$$

Ainsi, Iftimie, Gamblin et Sideris [12] ont pu établir que la taille du support est contrôlée par $\mathcal{O}((t \ln t)^{1/4})$. Pour le problème mixte avec un seul point vortex, j'ai obtenu la borne $\mathcal{O}(t^{1/4} \ln \ln t)$ dans les situations suivantes : ou bien l'intensité du point vortex est de même signe que ω_{reg}, ou bien elle est de signe opposé mais en valeur absolue supérieure à la masse de ω_{reg}.

Résultats d'existence relatifs au système mixte. Je me suis également intéressée à l'extension du résultat d'existence de Marchioro et Pulvirenti au cas où la vorticité ω_{reg} n'est plus uniformément bornée. Avec M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes [15], nous avons considéré la situation où ω_{reg} appartient à $L^1 \cap L^p$ avec $p > 2$. Le champ de vitesse $K * \omega_{\text{reg}}$ étant alors continu et uniformément borné, les équations différentielles ordinaires décrivant les trajectoires des points vortex dans (1.5) ont encore un sens. En revanche, il n'est pas clair que les caractéristiques $X(t)$ n'intersectent jamais les points vortex $z_i(t)$. Puisque l'approche particulaire pour le transport de la composante ω_{reg} semble mal approprié, nous avons recouru à la formulation eulérienne (c'est-à-dire, en termes d'e.d.p.) et démontré l'existence d'une solution $(\omega_{\text{reg}}, z_1, \ldots, z_l)$ globale lorsque les d_i sont tous positifs. Mentionnons que d'après les travaux d'Ambrosio et Crippa [1], il est possible d'établir l'existence et l'unicité d'un « flot généralisé », solution de l'e.d.o. $\dot{X} = (K*\omega)(t, X)$ dans un sens très faible, qui transporte ω_{reg}.

J'ai finalement envisagé le cas où ω_{reg} est une mesure de Radon *de signe fixe* à support compact appartenant à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (nappe de tourbillon) et où les intensités des points vortex sont de même signe que ω_{reg}. Le champ de vitesse $K * \omega_{\text{reg}}$ est alors trop peu régulier pour que l'on puisse définir les trajectoires des points vortex en tant que solutions d'e.d.o., y compris dans un sens plus faible, et il faut revenir à une notion généralisée des équations d'Euler pour la vorticité *totale* ω. Dans cette situation, j'ai établi l'existence d'une solution globale sans mesure de défaut. Ce résultat s'inscrit dans le cadre de celui de Delort [9] sur les nappes de tourbillon de signe fixe et de celui de Poupaud [25] sur les vorticités de type mesure, dans lequel apparaît une mesure de défaut concentrée sur la partie atomique de la vorticité.

L'équation de Ginzburg-Landau complexe

L'équation (1.2), qui appartient à la vaste famille des équations de Ginzburg-Landau complexes, se trouve à mi-parcours entre l'équation de Ginzburg-Landau parabolique (P) et celle de Gross-Pitaevskii (GP) obtenue avec $\kappa = 0$, cette dernière intervenant par exemple dans la modélisation de la superfluidité de l'hélium II ou de la condensation de Bose-Einstein.

Le problème de Cauchy dans l'espace d'énergie. Les équations de Gross-Pitaevskii et de Ginzburg-Landau parabolique sont des problèmes d'évolution liés à l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1-|u|^2)^2}{4\varepsilon^2}\Big] = \int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(u).$$

Il s'agit d'un hamiltonien pour (GP), alors que (P) correspond au flot gradient pour E_ε. Pour (1.2) l'énergie est, au moins formellement, décroissante en temps. Il est par conséquent naturel de se focaliser sur des solutions d'énergie finie dont le module est, en un sens, proche de un à l'infini. Un résultat récent de P. Gérard [11] assure que le problème de Cauchy dans l'espace d'énergie est globalement bien posé pour (GP) en petites dimensions. J'ai pour ma part étudié ce problème pour (1.2) en *dimension quelconque* et démontré l'existence d'une solution globale. L'unicité n'est en revanche acquise qu'en dimension inférieure à quatre. Pour le cas bidimensionnel, j'en en outre établi un résultat d'existence et d'unicité pour une classe de solutions d'énergie infinie incluant les superpositions de vortex (voir ci-après) ainsi que leurs perturbations dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pour de telles solutions, il existe une énergie renormalisée, finie et décroissante, apparentée à l'énergie de Ginzburg-Landau et qui en hérite un certain nombre de propriétés. Cette énergie avait été introduite par Béthuel et Smets [2] afin de traiter le problème de Cauchy pour l'équation de Gross-Pitaevskii dans le cadre des superpositions de vortex.

Dynamique des points vortex. Dans un second temps, j'ai étudié le comportement qualitatif des solutions u_ε de (1.2) dans un régime asymptotique remarquable obtenu lorsque ε tend vers zéro. Le facteur de pénalisation $1/\varepsilon^2$ dans le potentiel de l'énergie impose alors que le module des solutions u_ε converge vers un presque partout. Dans le régime que j'ai envisagé, les solutions peuvent néanmoins contenir, directement ou asymptotiquement, des zéros topologiques, appelés points vortex, qui sont décrits par le comportement de la vorticité (ou jacobien) $J(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}(u_\varepsilon \times \nabla u_\varepsilon)$. Plus précisément, la vorticité se comporte selon (1.3)

$$J(u_\varepsilon) \to \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.6}$$

où la convergence est entendue dans le dual des fonctions C_c^1. Typiquement, nous souhaiterions envisager des données initiales obtenues par superpositions de vortex

$$u_\varepsilon^*(z_i,d_i)(z)=\prod_{i=1}^{l} f_{d_i}\left(\frac{|z-z_i|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z-z_i}{|z-z_i|}\right)^{d_i}, \quad z\in\mathbb{C},$$

où $z_1,\ldots,z_l\in\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ et $d_i\in\mathbb{Z}$, et où les profils croissants f_{d_i} sont déterminés par une équation différentielle munie des conditions aux limites $f_{d_i}(0)=0$ et $f_{d_i}(+\infty)=1$.

En passant, signalons le fait remarquable que, pour de telles superpositions de vortex, le *supercourant*

$$j(u_\varepsilon^*)=u_\varepsilon^*\times\nabla u_\varepsilon^*$$

se comporte de manière tout à fait semblable au champ de vitesse correspondant à la superposition de poches de tourbillons déjà évoquée au paragraphe dédié à l'équation d'Euler. De manière plus générale, il existe une analogie formelle entre les fluides et les superfluides dans laquelle le supercourant joue le rôle d'une vitesse (ce qui justifie le terme de vorticité employé ici).

Pour les équations purement hamiltonienne et parabolique, la dynamique des points vortex a été intensément étudiée dans la littérature (voir [8, 4] pour le flot hamiltonien ou [6, 26] pour le flot parabolique). Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, on retrouve la loi de Kirchhoff de la mécanique des fluides[b], c'est-à-dire le flot hamiltonien pour l'énergie W. Pour l'équation parabolique, le système obtenu correspond au flot gradient pour l'énergie W.

Dans [21], j'ai déterminé le mouvement des points vortex pour l'équation (1.2) posée dans le plan en entier lorsque $\kappa=\kappa_\varepsilon$ est proportionnel[c] à $|\ln\varepsilon|^{-1}$

$$\kappa_\varepsilon=\alpha|\ln\varepsilon|^{-1}.$$

Cette évolution est décrite par le système d'équations différentielles ordinaires

$$(1+\alpha^2)d_i\dot{z}_i=\nabla_{z_i}^{\perp}W-\alpha d_i\nabla_{z_i}W, \quad i=1,\ldots,l.$$

Il est à noter que l'interpolation des équations (P) et (GP) pour chaque ε donne à la limite la même interpolation des systèmes d'équations différentielles obtenus pour chacune d'entre elles. Le résultat de [21] s'applique jusqu'au premier temps de collision entre les points vortex et à des données *très bien préparées*, c'est-à-dire des données asymptotiquement comparables, en termes de vorticité et d'énergie, à une superposition de vortex unitaires

$$J(u_\varepsilon)\to\pi\sum_{i=1}^{l}d_i\delta_{z_i} \quad \text{et}^{\text{d}} \quad E_\varepsilon(u_\varepsilon)-E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i,d_i))\to 0, \quad \text{où} \quad d_i=\pm1. \tag{1.7}$$

En particulier, ces hypothèses entraînent la concentration des densités d'énergie

$$\mu_\varepsilon(u_\varepsilon)=\frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln\varepsilon|}\to\pi\sum_{i=1}^{l}\delta_{z_i}.$$

[b] Cette asymptotique commune résulte de l'analogie formelle entre (GP) et (1.1) mentionnée plus haut, qui peut être vue par la transformation de Madelung $u_\varepsilon=\sqrt{\rho}e^{i\varphi}$. Dans l'asymptotique $\varepsilon\to 0$, $\rho\equiv 1$ et $v=-2\nabla\varphi$ vérifie l'équation d'Euler incompressible.

[c] Ceci permet de ramener le mouvement des vortex pour (P) et pour (GP) à la même échelle en temps.

[d] Dans le cadre des données d'énergie infinie, l'énergie de Ginzburg-Landau est remplacée par l'énergie renormalisée mentionnée ci-dessus et la définition de très bonne préparation est complétée par des conditions à l'infini, voir [4] ou [21].

L'ingrédient essentiel pour la démonstration tient dans une formule d'évolution vérifiée par la quantité $\langle J(u_\varepsilon), \chi\rangle + \alpha\langle \mu_\varepsilon(u_\varepsilon), \varphi\rangle$, où (χ, φ) est une paire de fonctions tests convenablement choisie. Mentionnons que l'évolution de la vorticité $J(u_\varepsilon)$ a été spécifiquement employée pour (GP), alors qu'elle se prête peu à (P) ; celle de la densité d'énergie $\mu_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est pour sa part bien adaptée à (P), mais ne l'est pas à (GP).

Dynamique des ondes amorties. Dans la dernière partie de ma thèse [22], j'ai examiné un régime asymptotique de nature différente pour (1.2). Ce travail ne concerne plus exclusivement le cas bidimensionnel et autorise des coefficients de dissipation $0 < \kappa < 1$ assez généraux. Dans ce régime, les solutions correspondent à des perturbations de champs constants de module égal à un :

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N,$$

où le module ρ_ε et le gradient de la phase $\nabla\varphi_\varepsilon$ s'écrivent par le biais du changement d'inconnues

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ -2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x), \end{cases} \tag{1.8}$$

où $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)(t)$ appartient à un espace de Sobolev $H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times H^s(\mathbb{R}^N)$ et vérifie certaines bornes. Ces dernières assureront notamment que la solution u_ε *ne s'annule en aucun point de* $\mathbb{R}^N$ tant que (1.8) a lieu. Ce nouveau régime asymptotique écarte donc, en particulier, les configurations de vortex.

J'ai démontré que, si la perturbation $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ est initialement assez régulière et convenablement bornée, elle est bien définie et reste bornée pour tout temps. De plus, lorsque $\kappa = \kappa(\varepsilon)$ est un paramètre évanescent avec ε, sa dynamique est correctement approchée par celle d'une équation des ondes amorties[e]

$$\begin{cases} \partial_t b + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \operatorname{div} v + \dfrac{2\kappa}{\varepsilon^2} b = 0 \\ \partial_t v + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \nabla b = 0. \end{cases}$$

En particulier, les résultats de [22] s'opposent à la formation de vortex (ou de zéro) dans la solution en temps fini. Ils sont obtenus dans le même esprit que ceux de Béthuel, Danchin et Smets [3] pour l'équation de Gross-Pitaevskii, qui ont mis en évidence une dynamique de type ondes libres jusqu'au premier temps T_ε d'apparition éventuelle d'un vortex et établi une borne inférieure pour T_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

[e] Ou par une équation des ondes amorties incluant une correction parabolique.

2 Travail en cours

Depuis novembre 2009, je me trouve en post-doctorat à l'Université de Rome « La Sapienza », où je travaille avec Carlo Marchioro et Mario Pulvirenti.

Le cadre général de notre recherche est l'équation de Vlasov-Poisson en dimension trois

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, \quad t \geq 0, \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

où $f = f(t,x,v)$ est une densité positive de particules. Ici le champ E est défini par

$$E(t,x) = \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(t,y)\, dy,$$

avec $\gamma = \pm 1$, où la densité macroscopique ρ est donnée par

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\, dv.$$

D'un point de vue physique, l'équation de Vlasov-Poisson (2.1) est utilisée comme modèle pour la dynamique des galaxies lorsque $\gamma = -1$ (cas attractif), et dans la description de la dynamique des plasmas lorsque $\gamma = 1$ (cas répulsif). Selon le contexte, le champ E correspond à un potentiel d'interaction newtonienne ou coulombienne. Nous nous focalisons essentiellement sur le cas répulsif $\gamma = 1$.

La situation que nous étudions, qui dans une certaine mesure rejoint celle de l'interaction tourbillon-points vortex que j'ai examinée au cours de ma thèse, est celle où la densité totale se comporte comme la superposition d'une densité de plasma régulière et de particules chargées

$$f_{\mathrm{tot}}(t,x,v) = f(t,x,v) + \sum_{i=1}^{l} q_i \delta_{x=\xi_i(t)} \otimes \delta_{v=\eta_i(t)}, \quad \text{où } f \text{ est régulière.} \tag{2.2}$$

Plus précisément, nous nous intéressons au caractère bien posé du problème de Cauchy pour l'équation de Vlasov-Poisson (2.1) dans le cadre défini par (2.2).

De manière analogue au système mixte Euler-points vortex, on décrit la dynamique de l'équation de Vlasov-Poisson dans le cadre de l'interaction plasma-charges (2.2) par découplage de (2.1) ; on ôte toutefois les termes les plus singuliers en convenant que les charges ne ressentent pas le champ créé par elles-mêmes. Puisque l'équation de Vlasov-Poisson correspond à une équation de transport, nous obtenons en termes de caractéristiques :

$$\begin{aligned} & f\left(t, X(t), V(t)\right) = f(0,x,v), \quad \text{où} \\ & \dot{X} = V, \quad \dot{V} = E(t,X) + \sum_{i=1}^{l} q_i \frac{X-\xi_i}{|X-\xi_i|^3}, \quad (X,V)(0) = (x,v), \\ & \quad \text{avec} \\ & \dot{\xi}_i = \eta_i, \quad \dot{\eta}_i = E(t,\xi_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l} q_j \frac{\xi_i - \xi_j}{|\xi_i-\xi_j|^3}, \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned} \tag{2.3}$$

En l'absence de particules chargées, l'existence et l'unicité d'une solution classique globale pour l'équation de Vlasov-Poisson lorsque $f(0) \in C^1$ est à support compact remonte à Pfaffelmoser [24], voir aussi [28]. Le cas de la dimension deux avait été résolu antérieurement, voir par exemple [23]. Ces résultats reposent sur des estimations a priori sur la vitesse maximale des particules issues du support de $f(0)$. Plus précisément, lorsque $(X(t), V(t))$ est une solution globale obtenue après régularisation de E, l'enjeu consiste à établir que pour tout $T > 0$

$$P(T) := \sup \{|V(t)| \mid \quad t \in [0,T], \quad (x,v) \in \text{supp } f(0)\} \leq C(T) < +\infty, \tag{2.4}$$

où $C(T)$ ne dépend que de T et de $f(0)$. Il est en effet bien connu qu'une borne uniforme pour les vitesses implique la convergence des solutions correspondantes vers une solution classique de (2.1) lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro. Nous découvrons ici pourquoi le cas de la dimension trois est plus délicat que celui de la dimension deux. En effet, en dimension deux, nous avons $E = x/|x|^2 * \rho$. Par conséquent (2.4) s'obtient aisément en remarquant que $\sup_{[0,T]} \|E(t)\|_\infty \leq C \sup_{[0,T]} \|\rho(t)\|_\infty^{1/2} \leq CP(T)$, alors qu'en dimension supérieure les seules estimations de potentiel ne permettent pas d'estimer $\|E(t)\|_\infty$ linéairement en fonction de $P(T)$. L'idée essentielle consiste alors à examiner l'accroissement du champ E *le long d'une caractéristique* sur un petit intervalle de temps ΔT et de montrer que

$$\int_{\Delta T} |E\,(t, X(t))\,|\,dt \leq CP(T)|\Delta T|. \tag{2.5}$$

Dans le cadre de l'interaction plasma-charges, le champ électrique induit par les charges devient très fortement singulier en celles-ci ; cette composante singulière pourrait, en principe, engendrer de très grandes vitesses et provoquer une explosion de la solution en temps fini. Ainsi, une borne de type (2.4) ne sera obtenue qu'à la condition de parvenir simultanément à contrôler inférieurement la distance des particules de plasma aux charges.

En dimension deux, le problème de Cauchy a été récemment traité par Caprino et Marchioro [7] dans le cas entièrement répulsif ($\gamma = 1$ et $q_i \geq 0\ \forall i$) et lorsque le support de $f(0)$ ne contient pas les charges. Dans [7], l'ingrédient crucial de l'analyse consiste à utiliser, au lieu de la vitesse, *l'énergie d'une particule de plasma.* L'intérêt de cette énergie, outre le fait qu'elle contrôle à la fois la vitesse de la particule et sa distance aux charges dans le cas répulsif, réside dans sa stabilité ; en effet, la partie singulière du champ n'intervient pas dans la dérivée en temps de l'énergie.

Dans [20], nous avons résolu le cas plus délicat de la dimension trois sous les mêmes hypothèses. Nous avons dans ce but adapté à notre cadre la méthode de [24, 28] et utilisé, comme dans [7], la notion d'énergie associée à une particule de plasma dans un référentiel centré en la charge i la plus proche

$$h\,(t, X(t), V(t)) = \frac{1}{2}|V(t) - \eta_i(t)|^2 + \frac{1}{|X(t) - \xi_i(t)|}.$$

De même que pour le cas bidimensionnel, il s'agit d'une quantité appropriée puisque stable. En revanche, les propriétés de stabilité pour la vitesse des particules de plasma n'ont pas lieu lorsque celles-ci s'approchent des charges ; cependant, dans le cas d'une interaction répulsive, nous avons démontré que ceci se produit pendant une période de temps assez petite pour que la contribution à l'intégrale totale (2.5) soit convenablement bornée. Cette observation constitue le point de départ essentiel dans l'adaptation de la méthode de [24, 28].

Références

[1] L. Ambrosio et G. Crippa, *Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Vol. 5, Springer (2008).

[2] F. Béthuel et D. Smets, *A remark an the Cauchy Problem for the 2D Gross-Pitaevskii equation with non zero degree at infinity*, Differential Integral Equations **20** (2007), 325-338.

[3] F. Béthuel, R. Danchin et D. Smets, *On the linear wave regime of the Gross-Pitaevskii equation*, à paraître dans J. Anal. Math. (2009).

[4] F. Béthuel, R. L. Jerrard et D. Smets, *On the NLS dynamics for infinite energy vortex configurations on the plane*, Rev. Mat. Iberoamericana **24** (2008), 671-702.

[5] F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets, *Collisions and phase-vortex interactions in dissipative Ginzburg-Landau dynamics*, Duke Math. J. **130** (2005), 523-614.

[6] F. Béthuel, G. Orlandi et D. Smets, *Dynamics of multiple degree Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 229-261.

[7] S. Caprino et C. Marchioro, *On the plasma-charge model*, à paraître dans Kinetic and Related Models (2010).

[8] J. E. Colliander et R. L. Jerrard, *Vortex dynamics for the Ginzburg-Landau-Schrödinger equation*, Internat. Math. Res. Notices **7** (1998), 333-358.

[9] J.-M. Delort, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 553-586.

[10] R. J. DiPerna et P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511-547.

[11] P. Gérard, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation*, Annales de l'IHP **23** (2006), no. 5, 765-779.

[12] D. Iftimie, T. Sideris et P. Gamblin, *On the evolution of compactly supported planar vorticity*, Comm. Partial Diff. Eqns. **24** (1999), no. 9-10, 1709-1730.

[13] C. Lacave et E. Miot, *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is initially constant near the point vortex*, SIAM J. Math Analysis **41** (2009), no. 3, 1138-1163.

[14] F. H. Lin et J. X. Xin, *On the incompressible fluid limit and the vortex motion law of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **200** (1999), 249-274.

[15] M. C. Lopes Filho, E. Miot et H. J. Nussenzveig Lopes, *Existence of a weak solution to the Vortex-Wave system*, en préparation.

[16] A. J. Majda et A. L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (2002).

[17] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *On the vortex-wave system*, Mechanics, analysis, and geometry : 200 years after Lagrange, M. Francaviglia (ed), Elsevier Science, Amsterdam, 1991.

[18] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag, 1991.

[19] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Vortices and Localization in Euler Flows*, Commun. Math. Phy. **154** (1993), 49-61.

[20] C. Marchioro, E. Miot et M. Pulvirenti, *The Cauchy problem for the 3-D Vlasov-Poisson system with point charges*, soumis, preprint ArXiv no. 1003.0643.

[21] E. Miot, *Dynamics of vortices for the complex Ginzburg-Landau equation*, A&PDE **2** (2009), no. 2, 159-186.

[22] E. Miot, *Damped wave dynamics for a complex Ginzburg-Landau equation with low dissipation*, en préparation.

[23] S. Okabe et T. Ukai, *On classical solutions in the large in time of the two-dimensional Vlasov equation*, Osaka J. Math **15** (1978), 245-261.

[24] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, Jour. Diff. Eq. **95** (1992), 281-303.

[25] F. Poupaud, *Diagonal defect measures, adhesion dynamics and Euler equation*, Methods and Appl. of Analysis **9** (2002), no. 4, 533-562.

[26] S. Serfaty, *Vortex collisions and energy-dissipation rates in the Ginzburg-Landau heat flow, part II : The dynamics*, Journal Eur. Math Society **9** (2007), no. 3, 383-426.

[27] B. Turkington, *On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid*, Arch. Rational Mech. Anal. **97** (1987), no. 1, 75-87.

[28] S. Wollman, *Global in time solution to the three-dimensional Vlasov-Poisson system*, Jour. Math. Anal. Appl. **176(1)** (1996), 76-81.