

CORRIGÉ DES EXERCICES – Fascicule n°2

A – INTÉGRALES CURVILIGNES. FORMULE DE GREEN–RIEMANN

Exercice A.1

Le but de cet exercice un peu abstrait est de montrer qu’une “courbe” continue n’est pas toujours facile à dessiner ...

1. On obtient ainsi une suite (f_n) de fonctions continues, définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans C . En effet, chaque fonction f_n est affine sur $[\frac{k-1}{9^n}, \frac{k}{9^n}]$ et pour tout entier $k \in \llbracket 1, 9^n \rrbracket$ on a $f\left(\left(\frac{k}{9^n}\right)^-\right) = f\left(\left(\frac{k}{9^n}\right)^+\right)$. Il est clair d’autre part que f_n est à valeurs dans C .
2. On a, par construction, sur chaque intervalle $[\frac{k-1}{9^n}, \frac{k}{9^n}]$ la distance (euclidienne dans \mathbb{R}^2) de f_n à f_{n+1} qui est majorée par la diagonale du carré de côté $2/9^n$. On a donc, pour la distance d de la convergence uniforme (dans \mathbb{R}^2) $d(f_n, f_{n+1}) \leq 2/9^n$. Il en résulte immédiatement que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow C$.
3. La continuité de f implique la compacité de $f([0, 1])$. Or tous les points $(p/3^n, q/3^n)$ (avec $p, q \in \llbracket 1, 3^n \rrbracket$) appartiennent au graphe de toutes les fonctions (f_k) pour $k \geq n + 1$, donc au graphe de f . Le seul compact de C contenant tous les points $(p/3^n, q/3^n)$ ($1 \leq p, q \leq 3^n, n \geq 1$) étant le carré C lui-même, on a démontré que $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice A.2

Le calcul de l’intégrale curviligne $C = \int_{\widehat{AB}} ((x-y) dx + (x+y) dy)$ est immédiat :

$$C = \int_0^\pi (-(\cos \theta - \sin \theta) \sin \theta + (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta) d\theta = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

On complète le demi-cercle avec le diamètre BA , de manière à avoir une courbe fermée (sans point double). L’intégrale curviligne D sur le segment BA s’écrit :

$$D = \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

Selon la formule de Green–Riemann, on doit avoir :

$$C + D = \iint \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \right) dx dy$$

l’intégrale double étant étendue au demi-cercle ; on obtient évidemment deux fois l’aire de ce demi-cercle, à savoir π , ce qui est exact.

Exercice A.3

1. Soit C un cercle centré en l'origine, de rayon R , parcouru dans le sens direct (dans le plan \mathbb{R}^2 orienté de manière usuelle). On a

$$\int_{\widehat{C}} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \left(-\sin \theta (R - \sin \theta) + \cos \theta (R \cos \theta) \right) d\theta = 2\pi.$$

2. On a :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - 2\frac{x^2}{r^4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{r^2} + 2\frac{x^2}{r^4}$$

donc $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Si la formule de Green–Riemann s'appliquait à l'intégrale curviligne de la question n°1, celle-ci devrait être nulle, ce qui n'est pas le cas. Cette formule ne s'applique pas car le champ de vecteurs (P, Q) n'est pas défini en $(0, 0)$ (et n'est pas prolongeable par continuité en ce point), alors que ce point est à l'intérieur du domaine défini par tout cercle centré à l'origine.

3. On cherche une fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, ce qui donne $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + g(y)$, la fonction g étant quelconque. Mais l'existence de $\frac{\partial f}{\partial y}$ implique que g est dérivable, et l'on a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{r^2} + g'(y)$, donc $g'(y) = 0$, si bien que g est une constante. Mais il apparaît une difficulté sérieuse, due au fait que la fonction $(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ne peut être définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En effet, cette fonction n'est définie sans ambiguïté que si $x \neq 0$. On peut convenir que la fonction g est nulle si $x > 0$ et poser :

$$f(0, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad \text{et, quand } x < 0, \quad f(x, y) = \begin{cases} \pi + f(-x, y) & \text{si } y > 0 \\ -\pi + f(-x, y) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

mais on ne peut alors donner de sens à $f(x, 0)$ quand $x < 0$, car $f(x, 0^+) = \pi$ tandis que $f(x, 0^-) = -\pi$. Si l'on accepte de se limiter au "plan coupé" déterminé par \mathbb{R}^2 privé de la demi-droite $(x \leq 0, y = 0)$, la fonction f précédente est parfaitement définie, de classe \mathcal{C}^∞ , et répond aux conditions requises. (On peut définir une fonction f de même type en retirant du plan \mathbb{R}^2 toute demi-droite issue de l'origine, ou, plus généralement, en ne retenant qu'un ouvert de \mathbb{R}^2 ne contenant pas l'origine et qui est *simplement connexe*, c'est-à-dire dans lequel aucun chemin n'entoure l'origine).

Exercice A.4

Comme on donne une paramétrisation de l'arc d'hélice, le calcul est immédiat :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} &= \int_0^{2\pi} \left((a \sin \theta + h\theta)(-a \sin \theta) + (h\theta + a \cos \theta)(a \cos \theta) + ah(\cos \theta + \sin \theta) \right) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta + ah \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta + \theta(\cos \theta - \sin \theta)) d\theta \\ &= ah \int_0^{2\pi} \theta(\cos \theta - \sin \theta) d\theta = ah \left[\theta(\sin \theta + \cos \theta) \right]_0^{2\pi} = 2\pi ah. \end{aligned}$$

Exercice A.5

1.

1) On paramétrise évidemment le cercle par $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), ce qui donne :

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta) + \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

2) On obtient, dans le cas du carré $ABCD$:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{-a} \frac{(x-a)}{x^2+a^2} dx + \int_a^{-a} \frac{(-a+y)}{a^2+y^2} dy + \int_{-a}^a \frac{(x+a)}{x^2+a^2} dx + \int_{-a}^a \frac{(a+y)}{a^2+y^2} dy \\ &= 4 \int_{-a}^a \frac{a dx}{a^2+x^2} = 8 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi. \end{aligned}$$

3) Pour le carré précédent, translaté de \overrightarrow{BA} , il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{3a}^a \frac{(x-a)}{x^2+a^2} dx + \int_{-a}^a \frac{(3a+y)}{9a^2+y^2} dy + \int_a^{3a} \frac{(x+a)}{x^2+a^2} dx + \int_a^{-a} \frac{(a+y)}{a^2+y^2} dy \\ &= 2a \int_a^{3a} \frac{dx}{a^2+x^2} + 3a \int_{-a}^a \frac{dy}{9a^2+y^2} - a \int_{-a}^a \frac{dy}{a^2+y^2} \\ &= 2 \int_1^3 \frac{dt}{1+t^2} + \int_{-1/3}^{1/3} \frac{dt}{1+t^2} - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan 3 - \frac{\pi}{2} + 2 \arctan \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

2. Cette dernière circulation, qui est nulle, suggère, de même que les résultats des questions 1 et 2, que le champ $\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ dérive d'un potentiel sur le complémentaire de l'origine. On vérifie en effet que :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \right) = -\frac{2}{x^2+y^2} - 2 \frac{(x-y)y}{(x^2+y^2)^2} + 2 \frac{(x+y)x}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

On cherche donc un potentiel V tel que $-\overrightarrow{\text{grad}} V$ soit le champ de vecteurs dont on a calculé les circulations : l'égalité $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x-y}{x^2+y^2}$ donne :

$$V(x, y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(y)$$

où g est une fonction dérivable (puisque V admet un gradient). La seconde condition donne : $\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} + g'(y)$, donc $g = C^{te}$. On obtient, en définitive, dans un plan coupé par une droite issue de l'origine, le potentiel suivant (défini à une constante près) :

$$V(x, y) = -\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si Γ est une courbe du plan qui entoure n fois l'origine et qui est parcourue dans le sens direct, on a :

$$\int_{\Gamma} \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2+y^2} = 2n\pi.$$

Exercice A.6

Cet exercice n'est vraiment simple que si l'on connaît les fonctions de variable complexe. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de la manière suivante : on pose $z = x + iy$, et

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{z}(e^z - 1) & \text{si } z \neq 0, \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Il est alors immédiat que $f(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}(x + iy)^{k-1}$, ce qui montre que f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 (somme d'une série polynomiale normalement convergente, ainsi que toutes ses dérivées partielles, sur tout borné de \mathbb{R}^2).

On alors, sur \mathbb{R}^2 privé de l'origine (on pose $r^2 = x^2 + y^2$),

$$f(x, y) = \frac{1}{r^2}(x - iy)((e^x \cos y) - 1 + ie^x \sin y), \quad \text{donc}$$

$$\Re f(x, y) = \frac{1}{r^2}(e^x(x \cos y + y \sin y) - x) \quad \text{et} \quad \Im f(x, y) = \frac{1}{r^2}(e^x(x \sin y - y \cos y) + y).$$

Si l'on écrit maintenant les deux intégrales curvilignes I et J sous la forme :

$$I = \int_{\Gamma} (P_1(x, y) dx + Q_1(x, y) dy) \quad \text{et} \quad J = \int_{\Gamma} (P_2(x, y) dx + Q_2(x, y) dy)$$

on voit que : $P_1(x, y) - P_2(x, y) = \Im f(x, y)$ et $Q_1(x, y) - Q_2(x, y) = \Re f(x, y)$. On vérifie maintenant que les deux intégrales curvilignes I et J ne dépendent pas de la courbe Γ , pourvu que cette courbe entoure une fois (et une fois seulement) l'origine dans le sens positif. Il suffit, en effet, par la formule de Green-Riemann, de vérifier que $\frac{\partial Q_k}{\partial x} + \frac{\partial P_k}{\partial y} = 0$ ($k = 1, 2$) (ce sont les conditions de Cauchy relatives aux fonctions analytiques e^z/z et $1/z$). On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^2} e^x (x \sin y - y \cos y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^2} e^x (x \cos y + y \sin y) \right) \\ &= \frac{e^x}{r^4} (-2x(x \sin y - y \cos y) + r^2(x \sin y - y \cos y) + r^2 \sin y) \\ &\quad + \frac{e^x}{r^4} (-2y(x \cos y + y \sin y) - r^2(x \sin y - y \cos y) + r^2 \sin y) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^2} \right) = \frac{2}{r^2} - 2 \frac{x^2 + y^2}{r^4} = 0.$$

La propriété annoncée est donc vérifiée ; il en résulte que $I - J$ ne dépend pas non plus de la courbe Γ (avec toujours les mêmes contraintes). Or les fonctions $P = P_1 - P_2$ et $Q = Q_1 - Q_2$ se prolongent par continuité en $(0, 0)$, si bien que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $a > 0$ tel que si $r^2 = x^2 + y^2 < a^2$, on a $|P(x, y) - P(0, 0)| < \varepsilon/\sqrt{2}$ et $|Q(x, y) - Q(0, 0)| < \varepsilon/\sqrt{2}$, donc :

$$\begin{aligned} |I - J| &= \left| \int_G (P(x, y) - P(0, 0)) dx + (Q(x, y) - Q(0, 0)) dy \right| \\ &\leq \int_G |(P(x, y) - P(0, 0)) dx + (Q(x, y) - Q(0, 0)) dy| \leq \int_G \varepsilon ds = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

(La dernière majoration provient de l'inégalité de Schwarz dans \mathbb{R}^2).

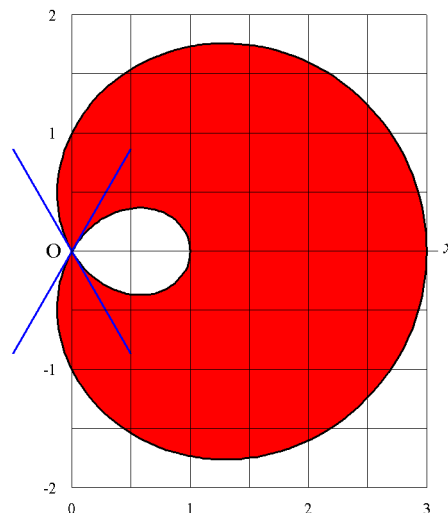
En définitive, l'intégrale curviligne $I - J$ est nulle, puisque ε peut être choisi arbitrairement petit. Comme le calcul de J est immédiat en utilisant la paramétrisation usuelle d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) :

$$J = \int_G \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 2\pi,$$

on voit que $I = 2\pi$.

Exercice A.7

La fonction $r(\theta)$ est monotone décroissante, de 1 à -3 , quand θ croît de 0 à π (on admet ici des valeurs négatives de r). La courbe admet l'axe de symétrie Ox . On calcule l'aire de la portion de plan cherchée située dans le demi-plan $y \geq 0$; alors, si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, r varie de $2 \cos \theta - 1$ à $2 \cos \theta + 1$, et pour $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$, r varie de 0 à $2 \cos \theta + 1$. L'élément d'aire, en coordonnées polaires, est $r dr d\theta$ et la surface considérée étant symétrique par rapport à l'axe Ox , il en résulte que l'aire A cherchée est donnée par :



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} \left((2 \cos \theta + 1)^2 - (2 \cos \theta - 1)^2 \right) d\theta + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/3} \cos \theta d\theta + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 3) d\theta = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + \pi = \pi + 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Une calculette donne $A \simeq 8,5$, ce qui est raisonnable, en comparant avec l'aire du cercle de diamètre 3, qui vaut environ 7,1.

La formule de Green-Riemann est un peu délicate à utiliser, car il faut veiller à parcourir le bord du domaine dans le sens trigonométrique. On a $x dy - y dx = r^2 d\theta$, et l'intégrale curviligne donne alors :

$$2A = \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 \cos \theta - 1)^2 d\theta$$

d'où immédiatement, pour A , la même expression que précédemment.

B – FORMES DIFFÉRENTIELLES

Exercice B.1

1. Simple exercice de calcul.
2. Si la forme $f\omega$ est fermée, le rotationnel du champ $A = (P, Q, R)$ est nul, ce qui implique, d'après la formule précédente, $f \operatorname{rot} A = -\operatorname{grad} f \wedge A$, donc nécessairement $f A \cdot \operatorname{rot} A = 0$. Comme on suppose le facteur intégrant f sans zéro, on voit qu'une condition nécessaire est que le champ A soit orthogonal à son rotationnel.
3. La réponse est négative, car $\operatorname{rot} A = -(1, 1, 1)$ donc $A \cdot \operatorname{rot} A = -(x + y + z) \neq 0$.

Exercice B.2

1. On a :

$$\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\left(P + x \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right), \quad \frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\left(Q + x \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + y \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)\right)$$

et, les fonctions P et Q étant homogènes de degré m :

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} = mP, \quad x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} = mQ$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(fP) - \frac{\partial}{\partial x}(fQ) &= f\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - f^2 P\left(Q + x \frac{\partial P}{\partial y} + y \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + f^2 Q\left(P + x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\ &= f\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - f^2 x P\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - f^2 y Q\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned}$$

donc $f\omega$ est fermée : f est bien un facteur intégrant de ω .

Soit (x_0, y_0) un point de U et Γ un arc de courbe orienté, de classe \mathcal{C}^1 , joignant (x_0, y_0) à (x, y) .

On peut examiner la fonction φ définie par $\varphi(x, y) = \int_{\Gamma} (fP dx + fQ dy)$. L'ouvert U étant convexe (simplement connexe suffit), la formule de Green-Riemann implique que cette intégrale ne dépend que des extrémités (x_0, y_0) et (x, y) de l'arc Γ , ce qui définit donc bien une fonction φ des deux variables x et y . Il est alors facile de vérifier que, pour h suffisamment petit, le point $(x+h, y)$ appartient encore à U et que : $\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = \int_x^{x+h} f(t, y)P(t, y) dt$, d'où aisément

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = f(x, y)P(x, y). \text{ De même, } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = f(x, y)Q(x, y).$$

2. On veut h facteur intégrant de ω , soit $\frac{\partial}{\partial y}(hP) - \frac{\partial}{\partial x}(hQ) = 0$. Comme f ne s'annule pas, on peut poser $h = fg$, ce qui donne, après calcul : $P \frac{\partial g}{\partial y} - Q \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, ce qui montre que les fonctions g et φ ont leurs gradients colinéaires (tous deux orthogonaux à $(P, -Q)$).

On détermine une fonction F par $F(u, v) = g(x, y)$ avec $u = \varphi(x, y)$ et $v = y$. Il est immédiat de vérifier qu'alors $Q \frac{\partial F}{\partial v} = 0$, donc que F ne dépend que de u (en supposant les zéros éventuels de Q isolés), ce qui donne le résultat cherché.

3. Pour la forme $\omega = y^2 dx + x^2 dy$, on a $f(x, y) = \frac{1}{xy(x+y)}$ donc

$$f\omega = \frac{y}{x(x+y)} dx + \frac{x}{y(x+y)} dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right) dy$$

d'où l'on tire facilement $\varphi(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x+y}\right) = -\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ et la forme générale des facteurs intégrants de la forme ω , à savoir : $\frac{1}{xy(x+y)} F\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$, la fonction F étant simplement supposée de classe \mathcal{C}^1 .

C – INTÉGRALES MULTIPLES

Exercice C.1

On a : $\int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^x \frac{dy}{x^2} - \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} = 1$ donc $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 1$.

De même,

$\int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^y \frac{dx}{y^2} + \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{y} - \left(1 - \frac{1}{y}\right) = -1$ donc $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = -1$.

On voit que l'on ne peut pas donner de sens à l'intégrale (impropre ?) $\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy$.

La fonction f n'est pas continue et est non bornée au voisinage de l'origine. On vérifie que l'on n'a convergence absolue pour aucune des intégrales superposées précédentes :

$$\int_0^1 |f(x, y)| dy = \int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - 1$$

dont l'intégrale en x de 0 à 1 diverge. Résultat analogue pour l'autre superposition d'intégrales.

Exercice C.2

$$1. I = \iint_{\mathcal{D}} 2xe^{-y} dx dy = \int_0^1 2x(e^{-x} - e^{-1}) dx = -2e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-1} dx - e^{-1} = 2 - 5e^{-1}.$$

$$2. I = \iint_{\mathcal{D}} x dx dy = \int_1^2 dy \left(\int_{-1}^{1/y} x dx \right) = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) dy = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{4}.$$

3. On prend comme variables $u = x + y$ et $v = x - y$:

$$I = \iint_{\mathcal{D}} e^{x+y} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{-1 < u, v < 1} e^u du dv = \int_{-1}^{+1} e^u du = 2 \operatorname{sh} 1.$$

4. On prend comme variables $u = x + y$ et $v = x - y$:

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^{+u} \exp\left(\frac{v}{u}\right) dv \right) du = \frac{1}{2} \int_0^1 2u \operatorname{sh} 1 du = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 1.$$

$$5. I = \int_0^2 dy \int_{2y}^4 e^{-x^2} dx = \iint_{0 < 2y < x < 4} e^{-x^2} dx dy = \int_0^4 e^{-x^2} \left(\int_0^{x/2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{-x^2} x dx \\ = \frac{1}{4} \int_0^{16} e^{-t} dt = \frac{1}{4} (1 - e^{-16}).$$

6. On pose $x = ar \cos \theta$ et $y = br \sin \theta$:

$$I = \iint_{\substack{0 < \theta < 2\pi \\ 0 < r < 1}} r^2 (a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) ab r dr d\theta = \frac{1}{4} ab \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} ab (a^2 - b^2).$$

Exercice C.3

$$I_n(\alpha) = \iint_{D_n(\alpha)} \frac{dx dy}{x^2 y^2} = \int_1^\alpha \left(\int_{\alpha/x}^n \frac{dy}{y^2} \right) \frac{dx}{x^2} + \int_\alpha^n \left(\int_1^n \frac{dy}{y^2} \right) \frac{dx}{x^2} \\ = \int_1^\alpha \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{n} \right) \frac{dx}{x^2} + \int_\alpha^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\alpha} \ln \alpha - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ = \frac{1}{\alpha} (1 + \ln \alpha) + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (1 + \ln \alpha)$.

Exercice C.4

On note \mathcal{D} le domaine défini par $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{2}{\pi} < y < \sin x$. On a à évaluer l'aire $A = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$ et les “valeurs moyennes” des abscisses et ordonnées

$$I = \iint_{\mathcal{D}} x dx dy \quad \text{et} \quad J = \iint_{\mathcal{D}} y dx dy.$$

On a facilement :

$$A = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_0^{\pi/2} (\sin x - \frac{2}{\pi}x) dx = 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{D}} x dx dy = \int_0^{\pi/2} x(\sin x - \frac{2}{\pi}x) dx = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\mathcal{D}} y dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{2x/\pi}^{\sin x} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}x^2) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

Il en résulte que les coordonnées du centre de gravité sont

$$X = \frac{12 - \pi^2}{3(4 - \pi)} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}$$

soit, numériquement, $X \simeq 0,83$ et $Y \simeq 0,61$.

Exercice C.5

On se place dans un repère orthonormé xOy tel que $A = (a, 0)$, $B = (a, a)$ et $C = (0, a)$. Par définition, le moment d'inertie cherché est donné par $I = \iint_{\mathcal{D}} y^2 \rho(x, y) dx dy$. On a, k désignant un facteur constant (homogène à une masse), $\rho(x, y) = \frac{k}{a^3} \sqrt{x^2 + y^2}$. Par symétrie par rapport à la diagonale OB , le moment d'inertie du carré par rapport au côté OC est aussi I , ce qui permet l'écriture plus symétrique :

$$I = \frac{k}{2a^3} \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy = \frac{k}{a^3} \iint_{0 \leq y \leq x \leq a} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy.$$

On pourrait passer en coordonnées polaires, mais on peut aussi poser $y = tx$ et prendre comme nouvelles variables x et t avec $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq t \leq 1$. Il vient alors :

$$\iint_{0 \leq y \leq x \leq a} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy = \int_0^a x^4 \left(\int_0^1 (1 + t^2)^{3/2} dt \right) dx = \frac{a^5}{5} \int_0^1 (1 + t^2)^{3/2} dt.$$

On peut poser $t = \text{sh } \varphi$; il vient, avec $\alpha = \arg \text{sh } 1 = \ln(\sqrt{2} + 1)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 + t^2)^{3/2} dt &= \int_0^\alpha \text{ch}^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^\alpha (2 \text{ch}^2 \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^\alpha (1 + \text{ch } 2\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\alpha \left(\frac{3}{2} + 2 \text{ch } 2\varphi + \frac{1}{2} \text{ch } 4\varphi \right) d\varphi = \frac{1}{8} (3\alpha + 2 \text{sh } 2\alpha + \frac{1}{4} \text{sh } 4\alpha) \\ &= \frac{1}{8} (3\alpha + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = \frac{1}{8} (7\sqrt{2} + 3 \ln(\sqrt{2} + 1)) \end{aligned}$$

car $\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{2}$, $\operatorname{ch} 2\alpha = 3$, donc $\operatorname{sh} 2\alpha = 2\sqrt{2}$ et $\operatorname{sh} 4\alpha = 12\sqrt{2}$. Il vient, en définitive :

$$I = \frac{ka^2}{40} (7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2} + 1)).$$

Exercice C.6

Il est naturel de prendre comme variables $u = x + y$ et $v = x - y$. Le rectangle \mathcal{D} donne le rectangle $\Delta : 0 \leq u + v \leq 2a$, $0 \leq u - v \leq 2b$ et l'on a $I = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} f(v) du dv$. Comme on veut intégrer en u à v fixé, on est amené à distinguer trois zones :

- si $-b \leq v \leq 0$, on a $-v \leq u \leq 2b + v$
- si $0 \leq v \leq a - b$, on a $v \leq u \leq 2b + v$
- si $a - b \leq v \leq a$, on a $v \leq u \leq 2a - v$.

On a alors $I = \int_{-b}^0 (b + v)f(v) dv + \int_0^{a-b} bf(v) dv + \int_{a-b}^a (a - v)f(v) dv$ que l'on peut écrire $I = \int_0^b (b - v)(f(-v) + f(a - b + v)) dv + b \int_0^{a-b} f(v) dv$.

Si $a = b$ et f est paire, $I = 2 \int_0^a (a - t)f(t) dt$.

Exercice C.7

Le segment de cercle \mathcal{D} est défini, dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 , par les conditions : $|x| \leq \sin \varphi$ et $\cos \varphi \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$. Ceci permet d'écrire, compte tenu de la symétrie de la figure par rapport à l'axe Oy :

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = 2 \int_{\cos \varphi}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy = 2 \int_{\cos \varphi}^1 \sqrt{1 - y^2} dy$$

On pose $y = \cos \theta$, ce qui donne

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_0^{\varphi} 2 \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\varphi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

En définitive, $\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$, la deuxième écriture permettant de vérifier que l'aire du segment est toujours positive ou nulle. Elle montre aussi que l'aire cherchée est celle du secteur circulaire d'angle au centre 2φ diminuée de celle (algébrique) du triangle de base $2 \sin \varphi$ et de hauteur $\cos \varphi$ (calcul purement géométrique de cette aire).

On vérifie aussi que les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \pi$ donnent bien les valeurs attendues pour l'aire d'un point, d'un demi-disque et du disque unité.

La seconde intégrale double se calcule facilement :

$$\iint_{\mathcal{D}} y dx dy = \int_0^{\sin \varphi} \left(\int_{\cos \varphi}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy^2}{dy} dy \right) dx = \int_0^{\sin \varphi} (1 - x^2 - \cos^2 \varphi) dx = \frac{2}{3} \sin^3 \varphi.$$

On a donc, pour $\varphi > 0$:

$$Y(\varphi) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^3 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{2}{3} \sin^2 \varphi \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}}.$$

Il est clair, sous cette forme, que $Y(\varphi)$ est toujours définie si $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, que $Y(\pi) = 0$ (ce qui est la moindre des choses pour le centre d'inertie d'un disque homogène) et que $Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3\pi} \simeq 0,424\,413$, ce qui est raisonnable (le centre d'inertie est un peu en dessous du milieu du rayon "vertical" joignant l'origine au point $(0,1)$).

On a aussi, quand $\varphi \rightarrow 0^+$, $\sin \varphi \sim \varphi$ et $\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} = 1 - \frac{1}{6}(2\varphi)^2 + o(\varphi^2)$, donc $Y(\varphi) \rightarrow 1$ quand $\varphi \rightarrow 0^+$: la fonction Y se prolonge par continuité à l'origine, le centre d'inertie du point $(0,1)$ coïncidant avec ce point.

Exercice C.8

1. La fonction que l'on intègre étant somme de produits de fonctions intégrables au sens de Riemann, elle est elle-même intégrable au sens de Riemann sur le carré $[a, b] \times [a, b]$.

On a, en développant,

$$|f(x)g(y) - f(y)g(x)|^2 = |f(x)|^2 |g(y)|^2 - 2 \Re e f(x)\overline{g(x)}g(y)\overline{f(y)} + |f(y)|^2 |g(x)|^2.$$

L'intégration, dans le carré $[a, b] \times [a, b]$ de cette somme de produits d'une fonction de x par une fonction de y est facile et donne :

$$\begin{aligned} I &= 2 \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) - 2 \Re e \left(\int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \right) \left(\int_a^b \overline{f(t)}g(t) dt \right) \\ &= 2 \left(\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) - \left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Comme la fonction intégrée dans le carré est positive, le réel I est positif, ce qui donne bien l'inégalité de Schwarz.

2. Si l'on suppose f et g continues, la fonction que l'on intègre pour obtenir I est continue et positive, donc $I = 0$ si et seulement si cette fonction est identiquement nulle, c'est-à-dire $f(x)g(y) = f(y)g(x)$ pour tous réels $x, y \in [a, b]$. On suppose l'une des deux fonctions non identiquement nulle, g par exemple. Il existe alors un réel $y \in [a, b]$ tel que $g(y) \neq 0$, d'où $f(x) = \frac{f(y)}{g(y)}g(x)$, ce qui montre que f est proportionnelle à g . Si $g \equiv 0$, alors g est proportionnelle à f . Dans tous les cas, l'inégalité de Schwarz pour deux fonctions continues f et g est une égalité si et seulement si les deux fonctions sont proportionnelles.

Exercice C.9

1. La fonction continue $t \mapsto \cos(t^2)$ admet, pour tout réel $A > 0$, une intégrale de Riemann $\int_0^A \cos(t^2) dt$. Si l'on pose $t = \sqrt{u}$, cette intégrale s'écrit sous la forme de l'intégrale impropre

convergente $\int_0^{A^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du = \int_0^{A^2} \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{d}{du}(\sin u) du$. Une intégration par parties donne alors :

$$\int_0^A \sin(t^2) dt = \left[\frac{\sin u}{2\sqrt{u}} \right]_0^{A^2} + \frac{1}{4} \int_0^{A^2} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du = \frac{\sin(A^2)}{2A} + \frac{1}{4} \int_0^{A^2} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du.$$

Si l'on fait tendre A vers $+\infty$, le premier terme du membre de droite converge vers 0, tandis que le second converge vers l'intégrale impropre absolument convergente (car $|\sin u/u\sqrt{u}| \leq u\sqrt{u}$ et

$3/2 > 1$) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du$, donc I existe et l'on a $I = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du$. Une nouvelle intégration par parties donne, en prenant la primitive $1 - \cos u$ nulle à l'origine de $\sin u$:

$$I = \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1 - \cos u}{u\sqrt{u}} \right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2\sqrt{u}} du \right)$$

qui conduit, en posant $u = 2t$ à :

$$I = \frac{3}{8\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{t}} dt.$$

Le réel I est donc l'intégrale impropre d'une fonction continue positive (au sens large) et non identiquement nulle : c'est un réel strictement positif.

On opère de même pour la seconde intégrale : un peu plus rapidement, on a :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u\sqrt{u}} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t\sqrt{t}} dt.$$

Comme I , le réel J est l'intégrale impropre d'une fonction continue positive (au sens large) et non identiquement nulle : c'est un réel strictement positif.

2. On a $f(x, y) = \cos(x^2) \cos(y^2) - \sin(x^2) \sin(y^2)$ et

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq R}} \cos(x^2) \cos(y^2) dx dy &= \left(\int_0^R \cos(x^2) dx \right) \left(\int_0^R \cos(y^2) dy \right) \\ \iint_{\substack{0 \leq x \leq R \\ 0 \leq y \leq R}} \sin(x^2) \sin(y^2) dx dy &= \left(\int_0^R \sin(x^2) dx \right) \left(\int_0^R \sin(y^2) dy \right) \end{aligned}$$

donc :

$$F_1(R) = \left(\int_0^R \cos(t^2) dt \right)^2 - \left(\int_0^R \sin(t^2) dt \right)^2.$$

D'après la première question, le membre de droite admet, lorsque $R \rightarrow +\infty$, la limite $I^2 - J^2$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} F_1(R) = I^2 - J^2.$$

De même, la formule $\sin(x^2 + y^2) = \sin(x^2) \cos(y^2) + \sin(y^2) \cos(x^2)$ conduit à l'égalité :

$$G_1(R) = 2 \left(\int_0^R \cos(t^2) dt \right) \left(\int_0^R \sin(t^2) dt \right)$$

qui montre que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} G_1(R) = 2 I J.$$

3. a) Le domaine d'intégration se traduit, en coordonnées polaires, par les conditions $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Le passage en coordonnées polaires donne donc, pour l'intégrale définissant F_2 , l'égalité :

$$F_2(R) = \int \int_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \cos(r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^R \cos(r^2) \frac{d}{dr}(r^2) dr = \frac{\pi}{4} \sin(R^2).$$

Il est manifeste que la fonction F_2 n'admet pas de limite lorsque la variable tend vers $+\infty$ (prendre, par exemple, la suite $R_n = \sqrt{n\pi/2}$ pour laquelle $F_2(R_{2n}) = 0$ et $F_2(R_{2n+1}) = (-1)^n \frac{\pi}{4}$).

b) Le même changement de variable conduit, pour la fonction G_2 , à :

$$G_2(R) = \int \int_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \sin(r^2) r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^R \sin(r^2) \frac{d}{dr}(r^2) \, dr = \frac{\pi}{4} (1 - \cos(R^2)).$$

Cette fonction n'admet, elle non plus, pas de limite quand la variable tend vers $+\infty$ (on a $G_2(R_{4n}) = 0$, $G_2(R_{4n+2}) = \frac{\pi}{2}$ et $G_2(R_{2n+1}) = \frac{\pi}{4}$.)

4. La réponse est évidemment négative, car le résultat dépend de la façon dont on traite le quart de plan $x, y \geq 0$ comme limite d'une partie fermée bornée. Ceci justifie pleinement le nom d'intégrale *impropre* donné aux intégrales de fonctions continues étendues à des domaines d'intégration non borné, ou aux intégrales de fonctions continues dans le domaine (ouvert) d'intégration mais non bornées sur l'adhérence du domaine : l'écriture

$$\int \int_{\substack{0 \leq x \leq +\infty \\ 0 \leq y \leq +\infty}} f(x, y) \, dx \, dy$$

est donc incorrecte, car elle ne définit rien de précis.

Remarques :

1) L'introduction de l'intégrale de Lebesgue ne modifie en rien les conclusions précédentes. Seul le cas d'intégrales *absolument* convergentes relève de la théorie de l'intégrale de Lebesgue (cette condition n'est pas réalisée ici).

2) On peut démontrer que les fonctions F_1 et F_2 convergent toutes deux en moyenne (au sens de Cesàro) vers la même limite, qui est nulle ; de même pour les fonctions G_1 et G_2 , avec $\frac{\pi}{4}$ comme limite commune. Ceci donne alors les relations $I^2 - J^2 = 0$ et $2IJ = \frac{\pi}{4}$. On en tire, compte tenu du signe de I et J établi à la première question, que $I = J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (ces intégrales, dites de *Fresnel*, interviennent en optique physique dans la théorie de la diffraction).

D – CALCUL DE VOLUMES

Exercice D.1

Le volume cherché V s'écrit :

$$V = \iiint_{\Delta} r \, dr \, d\theta \, dz \quad \text{avec } \Delta \text{ décrit par } 0 \leq r \leq f(z), 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } a \leq z \leq b.$$

L'intégration en θ est immédiate et donne un facteur 2π . Il reste alors une intégrale double sur une section méridienne : $a \leq z \leq b$ et $0 \leq r \leq f(z)$. On note D le fermé de \mathbb{R}^2 ainsi défini ; il vient $V = 2\pi \iint_D r \, dr \, dz$. L'aire A d'une section méridienne est : $A = \iint_D dr \, dz$, si bien que

$$V = 2\pi A \frac{\iint_D r \, dr \, dz}{\iint_D dr \, dz}.$$

On reconnaît dans le quotient la valeur moyenne de la distance à l'axe

de révolution Oz du point courant d'une section méridienne, c'est-à-dire la distance à l'axe de révolution du centre de gravité G d'une telle section. On obtient ainsi le théorème de *Guldin* :

$V = 2\pi\ell A$, ℓ étant la distance à l'axe du centre de gravité G . Le volume cherché est donc le produit de l'aire A d'une section méridienne par le périmètre $2\pi\ell$ du cercle décrit par le centre de gravité G d'une section méridienne lors d'une révolution complète autour de l'axe.

Applications :

- 1) Si S est un tore de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Oz d'un disque de rayon b et dont le centre est à la distance $a > b$ de cet axe, le volume du tore est $(2\pi a)(\pi b^2) = 2\pi^2 ab^2$.
- 2) Le volume d'une sphère de rayon R étant égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$, le centre de gravité d'un demi-disque de même rayon est à une distance ℓ du diamètre telle que $2\pi\ell \times \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$, donc $\ell = \frac{4}{3\pi}R$.

Exercice D.2

1. On a $x - a_3 = u(a_1 - a_3) + v(a_2 - a_3)$ et $y - b_3 = u(b_1 - b_3) + v(b_2 - b_3)$. Les points A_i ($i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$) n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{A_3A_1}$ et $\overrightarrow{A_3A_2}$ ne sont pas colinéaires, donc le système linéaire précédent admet une solution (u, v) unique.

Le triplet (u, v, w) où $w = 1 - u - v$ est donc déterminé de manière unique : ce sont les coordonnées barycentriques du point X relativement au triangle $T = (A_1A_2A_3)$. Le point X appartient au triangle si et seulement si c'est un barycentre (avec poids positifs ou nuls) des trois sommets A_i ($i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$), donc si et seulement si u, v et w sont positifs ou nuls.

2. L'aire \mathcal{A} du triangle $A_1A_2A_3$ est égale à $\iint_{X \in T} dx dy$. On effectue le changement de variable affine $(x, y) \mapsto (u, v)$ déterminé à la question précédente. Comme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & a_3 \\ b_1 - b_3 & b_2 - b_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_3 \\ b_1 - b_3 & b_2 - b_3 \end{vmatrix}$$

on a immédiatement le module du Jacobien de ce changement de variable : c'est la quantité δ définie dans l'énoncé. Il en résulte que :

$$\mathcal{A} = \delta \iint_{0 \leq u, 0 \leq v, u+v \leq 1} du dv = \delta \int_0^1 \left(\int_0^{1-v} du \right) dv = \delta \int_0^1 (1-v) dv = \frac{1}{2} \delta.$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_3 \\ b_1 - b_3 & b_2 - b_3 \end{vmatrix}$ est le "produit vectoriel" (en plongeant le plan \mathbb{R}^2 dans l'espace \mathbb{R}^3) des deux vecteurs $\overrightarrow{A_3A_1}$ et $\overrightarrow{A_3A_2}$; sa valeur absolue δ est donc l'aire du parallélogramme déterminé par ces deux vecteurs, soit deux fois l'aire du triangle T .

3. Comme dans la question n°1, on montre facilement qu'un point X de \mathbb{R}^3 admet une unique représentation barycentrique $X = uA_1 + vA_2 + wA_3 + tA_4$, avec $u + v + w + t = 1$, le point X appartenant au tétraèdre T déterminés par ces quatre points si et seulement si les quatre réels u, v, w et t sont positifs ou nuls. On prend la définition classique du volume d'un solide de \mathbb{R}^3 , et l'on effectue le changement de variable affine $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ déterminé de manière analogue à celui de la question n°2 ; il vient

$$V = \iiint_T dx dy dz = \delta \iiint_{u \geq 0, v \geq 0, 0 \leq w \leq 1-u-v} du dv dw$$

le réel δ désignant maintenant la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. On obtient

alors :

$$\begin{aligned} V &= \delta \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw \right) dv \right) du = \delta \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v) dv \right) du \\ &= \delta \int_0^1 \frac{1}{2} (1-u)^2 du = \frac{1}{6} \delta. \end{aligned}$$

Remarque : Le facteur $\frac{1}{6}$ ne peut être obtenu à l'aide de considérations purement géométriques ; même pour un tétraèdre "droit", on ne sait pas "empiler" six tétraèdres de mêmes dimensions de manière à obtenir un cube.

Exercice D.3

Le volume cherché V est donné par l'intégrale triple $\iiint dx dy dz$ avec les contraintes indiquées :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ et $0 \leq 2z \leq \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$. L'intégration en z , à x et y fixés, est immédiate et donne :

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right) dx dy.$$

On pose $x = ar \cos \theta$ et $y = br \sin \theta$, d'où $dx dy = abr dr d\theta$ (ceci équivaut à une affinité selon les deux axes, suivie d'un passage en coordonnées polaires), ce qui donne :

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1}} \left(\frac{a^2}{p} \cos^2 \theta^2 + \frac{b^2}{p} \sin^2 \theta^2 \right) r^2 abr dr d\theta = \frac{\pi}{8} ab \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{p} \right).$$

Exercice D.4

On pourrait songer à passer en coordonnées sphériques, mais les coordonnées cylindriques sont plus commodes : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et z . En utilisant les symétries de la sphère et du cylindre, le volume V vaut $4 \iiint_{\mathcal{D}} r dr d\theta dz$ où $\mathcal{D} = \{(r, \theta, z); 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \cos \theta, 0 < z < \sqrt{1-r^2}\}$.

Il vient, avec $\mathcal{D}_1 = \{(r, \theta); 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \cos \theta\}$,

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\mathcal{D}_1} r \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - \cos^2 \theta)^{3/2}) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3} \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Exercice D.5

On a, en passant en coordonnées cylindriques, $V = 2\pi \iint r dr dz$ avec $r^2 \leq 3z$ et $r^2 \leq 4 - z^2$ (l'intégration en θ de 0 à 2π est triviale). L'intersection de la sphère et du paraboloïde étant dans le plan $z = 1$, il vient

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{3z}} r dr \right) dz + 2\pi \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr \right) dz \\ &= \pi \int_0^1 3z dz + \pi \int_1^2 (4 - z^2) dz = \pi \left(\frac{3}{2} + 4 - \frac{1}{3}(8-1) \right) = \frac{19}{6} \pi. \end{aligned}$$

E – CALCUL D'AIRES

Exercice E.1

On a, en posant $X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z = f(r))$:

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ f'(r) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial X}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial X}{\partial r} \wedge \frac{\partial X}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -f'(r) \cos \theta \\ -f'(r) \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où l'élément d'aire en coordonnées cylindriques : $r\sqrt{1+f'^2(r)} dr d\theta$. Il en résulte que l'aire A de la surface de révolution est :

$$A = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ a \leq r \leq b}} r\sqrt{1+f'^2(r)} dr d\theta = 2\pi \int_a^b r\sqrt{1+f'^2(r)} dr.$$

On sait que la longueur L de l'arc de courbe Γ engendrant la surface par rotation autour de l'axe Oz est $L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(r)} dr$, donc $A = 2\pi \ell L$ avec :

$$\ell = \frac{\int_a^b r\sqrt{1+f'^2(r)} dr}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(r)} dr}.$$

Cette longueur est la valeur moyenne, prise sur la courbe section méridienne Γ , de la distance à l'axe Oz , c'est-à-dire la distance à cet axe du centre de gravité de cette courbe : on obtient bien le théorème de *Guldin* relatif aux surfaces de révolution.

Applications :

1. Si S est un tore de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Oz d'un cercle de rayon b et dont le centre est à la distance $a > b$ de cet axe, l'aire du tore vaut $(2\pi a)(2\pi b) = 4\pi^2 ab$.
2. L'aire d'une sphère de rayon R étant égal à $4\pi R^2$, le centre de gravité d'un demi-cercle de même rayon est à une distance ℓ du diamètre telle que $2\pi \ell \times \pi R = 4\pi R^2$, donc $\ell = \frac{2}{\pi} R$.

Exercice E.2

E étant une figure de révolution, il est commode d'utiliser des coordonnées de type cylindrique :

$$X(\theta, \varphi) = (b \sin \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Il vient :

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = b \sin \varphi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial X}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} b \cos \varphi \cos \theta \\ b \cos \varphi \sin \theta \\ -a \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{donc}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial X}{\partial \theta} = b \sin \varphi \begin{pmatrix} a \cos \theta \sin \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix}$$

d'où l'élément d'aire dans ce système de coordonnées : $b \sin \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\theta d\varphi$. Il en résulte que l'aire A de l'ellipsoïde est (l'intégration en θ est immédiate) :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi b \sin \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4\pi b \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 4\pi ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi = 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - e^2 t^2} dt. \end{aligned}$$

Le point tX , quand $t \in [0, 1]$, parcourt le solide dont le bord est l'ellipsoïde E . L'élément de volume à l'aide des coordonnées (t, θ, φ) (de type sphérique) de ce solide est $a^2 b t^2 \sin \varphi dt d\theta d\varphi$, donc, les intégrations en t et θ étant triviales :

$$V = \frac{2\pi}{3} ab^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

si bien que la sphère de même volume que l'ellipsoïde E a pour rayon $R = (ab^2)^{1/3}$. Son aire est donc $B = 4\pi(ab^2)^{2/3} = 4\pi a^2(1 - e^2)^{2/3}$, d'où, en effectuant un développement limité en e à l'ordre 4 :

$$B = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{2}{3}e^2 - \frac{1}{9}e^4 + o(e^4)\right).$$

On a aussi $\sqrt{1 - e^2 t^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 t^2 - \frac{1}{8}e^4 t^4 + o(e^4)$ si $0 \leq t \leq 1$, donc, en intégrant en t de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \sqrt{1 - e^2 t^2} dt = 1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{40}e^4 + o(e^4) \text{ et donc, pour } A, \text{ le développement limité à l'ordre 4 :}$$

$$A = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + o(e^4)\right) \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{40}e^4 + o(e^4)\right) = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{2}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 + o(e^4)\right)$$

ce qui donne, en définitive, $A - B \sim \frac{2\pi a^2 e^4}{45}$, conformément au résultat annoncé.

Remarque : il est naturel de trouver $A > B$ quand $e > 0$, car parmi les surfaces (régulières) de volume donné, c'est la sphère qui réalise le minimum de l'aire.

Exercice E.3

On place l'origine des coordonnées au sommet O du cône et le centre de la sphère sur l'axe Ox , de sorte que l'équation de la boule associée est $(x - R)^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Les coordonnées sphériques classiques sont alors commodes pour décrire le volume examiné : $(x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta)$. L'appartenance à la boule se traduit donc par l'encadrement $0 \leq r \leq 2R \sin \theta \cos \varphi$, et l'appartenance au demi-cône supérieur par $0 \leq \theta \leq \alpha$.

1. On a donc, pour le volume V cherché :

$$V = \iiint_{\substack{0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0 \leq r \leq 2R \sin \theta \cos \varphi}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{8}{3} R^3 \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \alpha \\ |\varphi| \leq \pi/2}} \sin^4 \theta \cos^3 \varphi d\theta d\varphi.$$

Or $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = 2 \int_0^1 (1 - t^2) dt = \frac{4}{3}$ et $8 \sin^4 \theta = 2(1 - \cos 2\theta)^2 = 3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta$, donc

$$V = \frac{4}{9} R^3 \int_0^\alpha (3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) d\theta = \frac{4}{9} R^3 \left(3\alpha - 2 \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha\right), \text{ soit}$$

$$V = \frac{1}{9} R^3 (12\alpha - 8 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha).$$

On vérifie que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a bien le volume de la demi-sphère de rayon R ; on peut aussi obtenir $V \sim \frac{32}{45}R^3\alpha^5$ quand $\alpha \rightarrow 0$. On vérifie aussi que le volume est bien une fonction positive : si $x = 2\alpha$, $f(x) = 6x - 8\sin x + \sin 2x$ est nulle à l'origine, et l'on a $f'(x) = 4(\cos x - 1)^2 \geq 0$ qui indique que f est croissante, donc positive pour $x \geq 0$.

2. Les points de Σ_1 sont tels que $r = 2R \sin \theta \cos \varphi$ et $0 \leq \theta \leq \alpha$. On note $(U_r, U_\theta, U_\varphi)$ les trois vecteurs unitaires du repère local attaché aux coordonnées sphériques :

$$U_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad U_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad U_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On sait que ce repère est orthonormé direct et que : $dX = U_r dr + rU_\theta d\theta + r \sin \theta U_\varphi d\varphi$. Pour les points de Σ_1 , on a :

$$dX = 2R(\sin \theta \cos \varphi U_\theta + \cos \theta \cos \varphi U_r) d\theta + 2R(\sin^2 \theta \cos \varphi U_\varphi - \sin \theta \sin \varphi U_r) d\varphi$$

donc $\frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \varphi} = 4R^2(\sin^3 \theta \cos^2 \varphi U_r - \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \varphi U_\theta + \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi U_\varphi)$ si bien que l'élément d'aire est, sur Σ_1 :

$$4R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{1/2} d\theta d\varphi = 4R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi.$$

L'aire cherchée est donc l'intégrale double :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma_1) &= 4R^2 \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \alpha \\ |\varphi| \leq \pi/2}} \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= 8R^2 \int_0^\alpha \sin^2 \theta d\theta = 2R^2 \int_0^{2\alpha} (1 - \cos u) du = 2R^2(2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

On vérifie que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donne le résultat escompté (aire de la demi-sphère). On voit aussi que

$$\mathcal{A}(\Sigma_1) \sim \frac{8}{3}R^2\alpha^3 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0.$$

3. Enfin, pour Σ_2 , on a $\theta = \alpha$ et $0 \leq r \leq 2R \sin \alpha \cos \varphi$. On a donc $dX = U_r dr + r \sin \alpha U_\varphi d\varphi$ et pour élément d'aire $r \sin \alpha dr d\varphi$, si bien que :

$$\mathcal{A}(\Sigma_2) = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2R \sin \alpha \cos \varphi \\ |\varphi| \leq \pi/2}} r \sin \alpha dr d\varphi = 2R^2 \sin^3 \alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi R^2 \sin^3 \alpha.$$

On vérifie à nouveau que le résultat est exact pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (aire du cercle de rayon R) et que $\mathcal{A}(\Sigma_2) \sim \pi R^2 \alpha^3$ quand $\alpha \rightarrow 0$.

Exercice E.4

L'équation de cette surface en coordonnées sphériques est $r^2 = \sin^2 \theta \cos 2\varphi$, ce qui donne comme contraintes sur θ et φ : $0 \leq \theta \leq \pi$ et $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$ (et $|\varphi - \pi| \leq \frac{\pi}{4}$ par symétrie par rapport au plan xOz). On va calculer l'aire de la portion de la surface correspondant à $x \geq 0$ et l'on multipliera le résultat obtenu par 2. On a $r dr = \sin \theta \cos \theta \cos 2\varphi d\theta - \sin^2 \theta \sin 2\varphi d\varphi$, donc :

$$\begin{aligned} dX &= U_r dr + r U_\theta d\theta + r \sin \theta U_\varphi d\varphi \\ &= \left(\frac{\sin \theta \cos \theta \cos 2\varphi}{r} U_r + r U_\theta \right) d\theta + \left(r \sin \theta U_\varphi - \frac{\sin^2 \theta \sin 2\varphi}{r} U_r \right) d\varphi \end{aligned}$$

donc $\frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \varphi} = -\sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\varphi U_\theta + r^2 \sin \theta U_r + \sin^2 \theta \sin 2\varphi U_\varphi$ d'où l'élément d'aire : $\sin^2 \theta d\theta d\varphi$. On a donc, pour l'aire cherchée :

$$\frac{1}{2}S = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \pi \\ |\varphi| \leq \pi/4}} \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4}\pi^2 \quad \text{d'où} \quad S = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Exercice E.5

L'usage des coordonnées cylindriques semble indiqué car l'intérieur du cylindre de révolution se traduit par $0 \leq r < a$. Le ph ayant pour équation $\lambda z = r^2 \cos 2\theta$, on a :

$$dX = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{2r}{\lambda} \cos 2\theta \end{pmatrix} dr + r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ -\frac{2r}{\lambda} \sin 2\theta \end{pmatrix} d\theta \quad \text{donc} \quad \frac{\partial X}{\partial r} \wedge \frac{\partial X}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\frac{2r}{\lambda} \cos \theta \\ \frac{2r}{\lambda} \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où l'élément d'aire : $r\sqrt{1 + \frac{4r^2}{\lambda^2}} dr d\theta$, si bien que l'aire cherchée S est (l'intégration en θ est immédiate) :

$$S = 2\pi \int_0^a r\sqrt{1 + \frac{4r^2}{\lambda^2}} dr = \frac{\pi\lambda^2}{4} \int_0^{(2a/\lambda)^2} \sqrt{1+u} du = \frac{\pi\lambda^2}{6} \left(\left(1 + \frac{4a^2}{\lambda^2}\right)^{3/2} - 1 \right).$$

On retrouve bien, à la limite $\lambda \rightarrow +\infty$, l'aire πa^2 du disque de rayon a , intersection du plan $z = 0$ avec le cylindre $x^2 + y^2 \leq a^2$.

F – FORMULE DE STOKES

Exercice F.1

1. 1) Calcul direct de $I = \int_{\partial D} \omega$. On prend la paramétrisation naturelle du cercle par : $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = 2$. Il vient :

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{2\pi} \frac{2 \sin^2 \theta}{\sqrt{5}(4 + \cos^2 \theta)} d\theta = - \frac{8}{\sqrt{5}} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 \theta}{\frac{4}{\cos^2 \theta} + 1} d\theta = - \frac{8}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(5 + 4t^2)(1 + t^2)} dt \\ &= - \frac{8}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{5}{5 + 4t^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = - \frac{8}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{2} = -2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

- 2) On peut aussi utiliser la formule de Green–Riemann dans le plan $z = 2$:

$$I = - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} \right) dx dy = -2 \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} dx dy.$$

Cette intégrale double se calcule aisément en coordonnées polaires :

$$I = -4\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(r^2 + 4)^{3/2}} = -2\pi \int_0^1 \frac{dt}{(t + 4)^{3/2}} = -4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

2. On commence par calculer J . La face latérale du cône C admet la paramétrisation suivante : $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 1 + r)$ où $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq r \leq 1$. Il vient alors :

$$dy dz = r \cos \theta d\theta dr \quad dz dx = r \sin \theta d\theta dr \quad dx dy = -r d\theta dr$$

d'où l'expression suivante pour l'intégrale double J :

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r(r+1)}{(r^2 + (r+1)^2)^{3/2}} d\theta \right) r dr = -2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(2r^2 + 2r + 1)^{3/2}}.$$

On pose $r = 1/t$, puis $u = 1 + t$ et enfin $u = \tan \varphi$:

$$J = -2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(2 + 2t + t^2)^{3/2}} = -2\pi \int_2^{+\infty} \frac{du}{(u^2 + 1)^{3/2}} = -2\pi \int_{\arctan 2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi,$$

d'où, en définitive, $J = -2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -I$.

Il est naturel de se demander si la relation $I + J = 0$ pouvait être prévue. Les faces D et C_1 déterminent un volume fermé (le "chapeau" du cône), et l'intégrale J est le flux sortant par la face C_1 du champ de vecteurs $\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$ (avec évidemment $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). Le calcul de la divergence de ce champ est facile : on obtient $\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, donc le flux *sortant* J est égal au flux *entrant* par la face D du même champ de vecteurs, à savoir $-\iint_D \frac{2}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} dx dy$, expression que l'on sait être égale à $-I$ (question 1.2). Le résultat obtenu est conforme à la formule d'Ostrogradsky.

(On peut facilement vérifier que $\omega_1 = d\omega$ sur \mathbb{R}^3 privé de l'origine).

Exercice F.2

1. Les points (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ appartiennent à une portion S_1 d'un hyperboloïde de révolution (autour de l'axe Oz).

Ceux qui vérifient $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 1$ appartiennent à une partie S_2 de la sphère de centre l'origine et de rayon 2.

Le plan $z = 0$ coupe l'adhérence de \mathcal{D} selon le quart de disque S'_1 décrit par :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Enfin, les plans $x = 0$ et $y = 0$ déterminent deux faces S'_2 et S'_3 dont les équations sont, respectivement :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{3}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}(y^2 - 1)} \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}, \\ y = 0, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 - 1)} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}. \end{aligned}$$

(Voir figure page suivante).

2. Le champ \vec{A} est trivialement de divergence nulle. La vérification de la formule d'Ostrogradsky n'est qu'une question de patience :

a) Calcul du flux Φ_1 à travers S_1 : une paramétrisation simple de cette face est :

$$x = \sqrt{1 + 2z^2} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{1 + 2z^2} \sin \varphi, \quad z = z \quad \text{avec} \quad 0 \leq z \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Alors :

$$dx dy = 2z dz d\varphi, \quad dy dz = -\sqrt{1 + 2z^2} \cos \varphi dz d\varphi, \quad dz dx = -\sqrt{1 + 2z^2} \sin \varphi dz d\varphi$$

donc

$$yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy = (-2z(1 + 2z^2) \sin \varphi \cos \varphi + 2z(1 + 2z^2) \sin \varphi \cos \varphi) dz d\varphi = 0$$

et le flux cherché est nul : $\Phi_1 = 0$.

b) *Calcul du flux Φ_2 à travers S_2* : on prend la paramétrisation donnée par les coordonnées sphériques :

$$x = 2 \sin \theta \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \theta \sin \varphi, \quad z = 2 \cos \theta \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

On a alors :

$$dx dy = 4 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi, \quad dy dz = 4 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi, \quad dz dx = 4 \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi$$

qui donne :

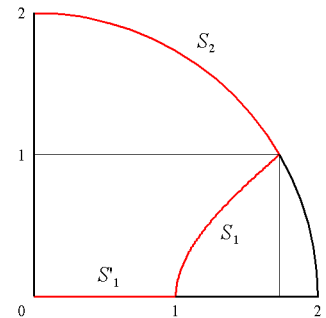
$$\Phi_2 = 3 \times 16 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/3}} \sin^3 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 = \frac{27}{8}.$$

c) *Flux Φ'_1 à travers S'_1* : ici, on a : $z = 0$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, donc (le signe – pour avoir le flux sortant) :

$$\Phi'_1 = - \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} r^2 \sin \theta \cos \theta r dr d\theta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

d) *Flux Φ'_2 à travers S'_2* : cette fois-ci, $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 - 1)} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}$. On a donc (le signe – provenant du fait que l'axe Oy est orienté vers l'intérieur) :

$$\begin{aligned} \Phi'_2 &= - \int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z dz \right) dx - \int_1^{\sqrt{3}} x \left(\int_{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2-1)}}^{\sqrt{4-x^2}} z dz \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (4x - x^3) dx - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \left(4x - x^3 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (4x - x^3) dx + \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{3}} (x^3 - x) dx \\ &= -3 + \frac{9}{8} + \frac{9-1}{16} - \frac{3-1}{8} = -\frac{13}{8}. \end{aligned}$$



e) *Flux Φ'_3 à travers S'_3* : il est égal, pour des raisons de symétrie, à Φ'_2 .

On vérifie que $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi'_3 = \frac{27}{8} - \frac{1}{8} - 2 \times \frac{13}{8} = 0$, résultat conforme à la formule d'Ostrogradsky.

Exercice F.3

On reconnaît dans la courbe frontière, une fenêtre de Viviani.

Un calcul élémentaire donne : $\operatorname{div} \vec{A} = 2x + 2y - 2(x + y) = 0$. On doit donc vérifier que la somme des flux sortant par les trois faces est nulle.

1. a) *Calcul du flux Φ_1 à travers S_1* : il s'agit du disque $z = 0$, $x = \frac{1}{2}a(1 + r \cos \theta)$, $y = \frac{1}{2}a(1 + r \sin \theta)$ où $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On a (le signe – disparaissant car on calcule le flux sortant) :

$$\Phi_1 = a \iint_{S_1} (x + y) dx dy = \frac{a^4}{8} \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (2 + r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{8} a^4.$$

b) Calcul du flux Φ_2 à travers S_2 : les coordonnées sphériques sont ici les bienvenues. On a :

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Alors :

$$dy dz = a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi, \quad dz dx = a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi, \quad dx dy = a^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi,$$

donc :

$$\Phi_2 = a^4 \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \theta}} \left(\sin^4 \theta (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) - (2 \cos \theta + 1) \sin^2 \theta \cos \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \right) d\theta d\varphi.$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \cos \varphi d\varphi = \cos \theta$$

d'où, en utilisant la symétrie $\varphi \mapsto -\varphi$,

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= 2a^4 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^4 \theta \cos \theta \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 \theta\right) - (2 \cos \theta + 1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= 2a^4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3} \sin^4 \theta + \frac{1}{3} \sin^6 \theta - 2 \sin^2 \theta + 2 \sin^4 \theta \right) \cos \theta d\theta - 2a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= 2a^4 \left(\frac{2}{3.5} + \frac{1}{3.7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) - 2a^4 \frac{\pi}{16} = \frac{2a^4}{3.5.7} (14 + 5 - 70 + 42) - \frac{\pi}{8} a^4 \\ &= -\frac{6}{35} a^4 - \frac{\pi}{8} a^4. \end{aligned}$$

c) Calcul du flux Φ_3 à travers S_3 : la paramétrisation naturelle de cette portion de cylindre est :

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta), \quad y = \frac{a}{2} \sin \theta \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq \frac{a}{2}(1 - \cos \theta) = a \sin \frac{\theta}{2}. \quad \text{On a :}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq a \sin \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{a}{2} \right)^3 \left((1 + \cos \theta)^2 \cos \theta + \sin \theta \sin^2 \theta \right) d\theta dz \\ &= \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} \left((1 + \cos \theta)^2 \cos \theta + \sin^3 \theta \right) \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta$ change de signe quand on change θ en $2\pi - \theta$; elle est donc nulle.

Il reste :

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta)^2 \cos 2\theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)^2 \cos 2\theta \sin \theta d\theta = \frac{a^4}{2} \int_0^1 (2t^2)^2 (2t^2 - 1) dt \end{aligned}$$

en posant $t = \cos \theta$. On obtient en définitive $\Phi_3 = 2a^4 \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{35} a^4$.

On vérifie la formule d'Ostrogradsky : $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$.

2. La circulation sur C du champ $(y^2z + axy, -(x^2z + axy))$ est égale, par la formule de Green-Riemann dans le plan xOy , à $-\iint_D ((2z+a)x + (2z+a)y) dx dy$, c'est-à-dire l'opposé du flux Φ_1 précédemment calculé ; on a donc :

$$\int_C \left((y^2z + axy) dx - (x^2z + axy) dy \right) = -\Phi_1 = -\frac{\pi}{8}a^4.$$

On retrouve aisément ce résultat par calcul direct ; on a : $x = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$ et $y = \frac{a}{2} \sin \theta$, donc (en note K la circulation cherchée) :

$$\begin{aligned} K &= a \int_C xy(dx - dy) = -\frac{a^4}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta (1 + \cos \theta) (\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\ &= -\frac{a^4}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta (1 + \cos \theta) d\theta = -\frac{a^4}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{8}a^4. \end{aligned}$$

On peut enfin facilement vérifier que :

$$\text{rot}(y^2z + axy, -(x^2z + axy), 0) = \vec{A}$$

ce qui explique que ce dernier champ de vecteurs soit de divergence nulle.

Exercice F.4

1. La normale à la face latérale du cylindre étant parallèle au plan xOy , la fonction λ n'intervient pas dans le calcul de ce flux. On paramétrise évidemment par $(x = R \cos \theta, y = R \sin \theta)$, ce qui donne :

$$\Phi_1 = - \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} \frac{R^2 z}{R^2 + z^2} d\theta dz = -\pi \int_0^{h^2} \frac{R^2 dt}{R^2 + t} = -\pi R^2 \ln\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right).$$

2. On pose, comme toujours, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et l'on se place dans le complémentaire de l'origine. On a :

$$\text{div } \vec{V} = -\frac{z}{r^2} + 2\frac{x^2z}{r^4} - \frac{z}{r^2} + 2\frac{y^2z}{r^4} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = -2\frac{z}{r^2} + 2\frac{(x^2 + y^2)z}{r^4} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

On veut donc $\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 2\frac{z^3}{r^4}$ d'où, compte tenu de la valeur de $\lambda(x, y, 0)$:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= \ln(x^2 + y^2) + \int_0^{z^2} \frac{t dt}{(x^2 + y^2 + t)^2} \\ &= \ln(x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

soit : $\lambda(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$

3. On utilise évidemment, pour la face supérieure, les coordonnées polaires ; il vient, pour le flux sortant $\Phi_2(h)$:

$$\Phi_2(h) = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R}} \left(\ln(r^2 + h^2) - \frac{h^2}{r^2 + h^2} \right) r dr d\theta = \pi \int_0^{R^2} \left(\ln(h^2 + t) - \frac{h^2}{h^2 + t} \right) dt$$

et une intégration par parties donne tout de suite :

$$\Phi_2(h) = \pi R^2 (\ln(R^2 + h^2) - 1).$$

On obtient, en prenant la limite $h \rightarrow 0^+$, l'expression $\pi R^2(\ln(R^2) - 1)$ qui n'est rien d'autre que le flux entrant du champ \vec{V} par le disque inférieur; c'est assez naturel, puisque le champ est de divergence nulle et que la contribution de la face latérale est nulle à la limite. Toutefois, la non-définition du champ à l'origine ne permet pas de prévoir ce résultat, à moins d'estimer le flux du champ \vec{V} à travers une "petite" demi-sphère de rayon ε et de montrer que cette contribution est de limite nulle quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. C'est ce que la question suivante permet de faire.

4. Le calcul s'effectue très facilement en coordonnées sphériques. On obtient tout de suite :

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} R^2(\ln R^2 - 1) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi R^2(\ln R^2 - 1) \int_0^1 t \, dt = \pi R^2(\ln R^2 - 1).\end{aligned}$$

Il est alors clair que $\Phi_3 \rightarrow 0$ si $R \rightarrow 0^+$, ce qui permet de démontrer que le flux $\Phi_2(h)$ est une fonction continue de h en 0 ($h > 0$)

Exercice F.5

1. Le calcul de la divergence de \vec{V} est facile :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} x(z^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y} y(x^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z} y(x^2 - z^2) = 0.$$

On cherche un champ de vecteurs $\vec{A} = (X, Y, Z)$ tel que $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{A}$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = xz^2 - -xy^2 \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = yx^2 - -yz^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = zy^2 - -zx^2 \end{cases}$$

qui admet presque trivialement une solution symétrique : $X = x^2yz$, $Y = xy^2z$, $Z = xyz^2$: le champ de vecteurs $\vec{A} = xyz(x, y, z)$ répond à la question.

Puisque \vec{V} est un champ de rotationnel, le flux sortant I est égal à la circulation sur Γ du champ \vec{A} :

$$I = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{T} \, ds = \int_{\Gamma} xyz(x \, dx + y \, dy + z \, dz) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xyz \, d(x^2 + y^2 + z^2).$$

2. S est, dans le plan $x = 1$, le quart de disque unité compris entre les deux bissectrices des axes, du côté des $z \geq 0$. On note O le centre du cercle unité, A le point $(1, 1)$ et $B = (-1, 1)$. L'arc \widehat{AB} ne contribue pas à l'intégrale curviligne I car $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sur cet arc. On a donc :

$$I = \frac{1}{2} \int_{\widehat{OA}} xyz \, d(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2} \int_{\widehat{BO}} xyz \, d(x^2 + y^2 + z^2) = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} u^3 \, du - 2 \int_{1/\sqrt{2}}^0 u^3 \, du = \frac{1}{4}.$$

Le calcul direct du flux I est assez confortable : on a $x = 1$, $y = r \sin \theta$ et $z = r \cos \theta$ avec $0 \leq r \leq 1$ et $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$, donc :

$$\begin{aligned}dy \, dz &= r \, dr \, d\theta \quad \text{et} \quad dz \, dx = dx \, dy = 0, \quad \text{donc} \\ I &= \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}}} (r^2 \cos 2\theta) (r \, dr \, d\theta) = \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exercice F.6

On peut déjà noter que la surface est comprise entre les plans $x = 0$ et $x = a$.

1. Les points de S qui appartiennent au plan $y = ux$ vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a(1 + u^2)x$, qui est celle d'une sphère. L'intersection d'un plan et d'une sphère étant un cercle, le premier point est établi (il est immédiat de vérifier que tout le cercle appartient à l'intersection). On remarque que le plan $y = ux$ coupe aussi S selon l'axe Oz ; ce "cercle" est aussi obtenu comme limite des cercles précédents quand $u \rightarrow +\infty$.

Si l'on coupe par le plan $z = v(a - x)$, on obtient :

$$(a - x)(x^2 + y^2 + z^2) = az^2 = av^2(a - x)^2$$

ce qui donne la droite ($x = a, z = 0$) et l'intersection avec la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = av^2(a - x)$, qui est à nouveau un cercle. Cette fois-ci, le cercle entier ne fait pas partie de la courbe, mais seule la partie correspondant à $0 \leq x \leq a$. La droite ($x = a, z = 0$) correspond au cas $v = 0$ (intersection par le plan xOy).

Ceci suggère une paramétrisation rationnelle de S : on pose $y = ux$, $z = v(a - x)$, d'où l'on tire : $xz^2 = (a - x)(1 + u^2)x^2$, donc $v^2(a - x) = (1 + u^2)x$ et :

$$x = \frac{av^2}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{auv^2}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{av(1 + u^2)}{1 + u^2 + v^2}.$$

On peut aussi poser $u = \operatorname{sh} \omega$, $v = \operatorname{ch} \omega \tan \theta$, ce qui donne facilement :

$$x = a \sin^2 \theta, \quad y = a \operatorname{sh} \omega \sin^2 \theta, \quad z = a \operatorname{ch} \omega \sin \theta \cos \theta.$$

C'est de cette paramétrisation que l'on se servira dans les questions suivantes.

2. La surface S (et le volume associé) sont symétriques par rapport aux plans xOy et yOz ; on introduit $D = \{(\theta, \omega); 0 \leq \operatorname{sh} \omega \leq \lambda, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Le volume cherché s'exprime alors par l'intégrale triple suivante, étendue au volume considéré, ce qui donne :

$$V = \iiint_D dx dy dz = 2 \iint_D z dx dy,$$

(le facteur 2 venant de la symétrie par rapport au plan xOy). Comme x ne dépend pas de ω , le calcul du Jacobien $\frac{D(x, y)}{D(\theta, \omega)}$ est immédiat et donne :

$$dx dy = a^2 \sin 2\theta \operatorname{ch} \omega \sin^2 \theta d\theta d\omega = 2a^2 \operatorname{ch} \omega \sin^3 \theta \cos \theta d\theta d\omega.$$

Il en résulte que :

$$V = 4a^3 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\operatorname{arg sh} \lambda} \operatorname{ch}^2 \omega d\omega \right).$$

On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta && (\theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{32} && (\text{on a pris la demi-somme}). \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\int_0^{\operatorname{arg sh} \lambda} 2 \operatorname{ch}^2 \omega d\omega = \int_0^{\operatorname{arg sh} \lambda} (1 + \operatorname{ch} 2\omega) d\omega = \operatorname{arg sh} \lambda + \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

Il en résulte que :

$$V = 2a^3 I (\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})) = \frac{\pi}{16} a^3 (\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})).$$

3. Le calcul des coordonnées (G_x, G_y, G_z) du centre de gravité du volume précédent ne pose pas de problème particulier. On note déjà que $G_z = 0$ pour des raisons de symétrie (par rapport au plan xOy). Il vient :

$$G_x V = \iiint x \, dx \, dy \, dz = 4a^4 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\operatorname{arg sh} \lambda} \operatorname{ch}^2 \omega \, d\omega \right).$$

L'intégrale $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$ se calcule à l'aide du même procédé que celui utilisé pour le calcul de I : on a $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$, donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta \, d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta\right) \, d\theta = I - \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta \, d\theta = I - \frac{1}{64} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)^2 \, d\theta \\ &= I - \frac{1}{64} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(1 - \frac{3}{8}\right) I = \frac{5}{8} I \quad \text{d'où} \quad G_x = \frac{5}{8} a. \end{aligned}$$

De même,

$$G_y V = \iiint y \, dx \, dy \, dz = 4a^4 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\operatorname{arg sh} \lambda} \operatorname{ch}^2 \omega \operatorname{sh} \omega \, d\omega \right).$$

donc :

$$G_y V = 4a^4 I_1 \frac{1}{3} (\operatorname{ch}^{3/2}(\operatorname{arg sh} \lambda) - 1) = 4a^4 \frac{5}{24} I ((1 + \lambda^2)^{3/2} - 1)$$

d'où $G_y = \frac{5a}{12} \cdot \frac{(1 + \lambda^2)^{3/2} - 1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})}$. En définitive, les coordonnées du centre de gravité sont :

$$\left(\frac{5}{8} a, \quad \frac{5a}{12} \cdot \frac{(1 + \lambda^2)^{3/2} - 1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})}, \quad 0 \right).$$

Comme $G_y \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$, on voit que ce centre de gravité décrit, quand λ varie de 0 à $+\infty$, la demi-droite

$$(x = \frac{5}{8} a, y \geq 0, z = 0).$$

4. Le calcul de l'aire s'effectue de façon classique : les variables θ et ω variant toujours dans D , on a, en posant $X(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \theta} &= a \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ \operatorname{sh} \omega \sin 2\theta \\ \operatorname{ch} \omega \cos 2\theta \end{pmatrix} & \frac{\partial X}{\partial \omega} &= a \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{ch} \omega \sin \theta \\ \operatorname{sh} \omega \cos \theta \end{pmatrix} & \text{donc} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \omega} &= a^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \operatorname{sh}^2 \omega \sin 2\theta \cos \theta - \operatorname{ch}^2 \omega \sin \theta \cos 2\theta \\ -\operatorname{sh} \omega \sin 2\theta \cos \theta \\ \operatorname{ch} \omega \sin 2\theta \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où facilement $\left\| \frac{\partial X}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial \omega} \right\| = a^2 \operatorname{ch}^2 \omega \sin^2 \theta$. On a alors, en notant \mathcal{A} l'aire cherchée :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2a^2 \iint_D \operatorname{ch}^2 \omega \sin^2 \theta \, d\theta \, d\omega = 2a^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\operatorname{arg sh} \lambda} \operatorname{ch}^2 \omega \operatorname{sh} \omega \, d\omega \right) \\ &= \frac{\pi}{4} a^2 (\lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} + \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})). \end{aligned}$$

5. La circulation \mathcal{C} du champ de vecteurs \vec{V} sur le cercle C_λ associé à la valeur $\omega = \operatorname{arg sh} \lambda$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_{C_\lambda} (yz \, dx + xz \, dy + 2y(a-x) \, dz) \\ &= a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega \sin^3 \theta \cos \theta \sin 2\theta + \operatorname{ch} \omega \sin^3 \theta \cos \theta \operatorname{sh} \omega \sin 2\theta \\ &\quad + 2 \operatorname{sh} \omega \sin^2 \theta \cos^2 \theta \operatorname{ch} \omega \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= 2a^3 \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (2 \sin^2 \theta + 1 - 2 \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= 2a^3 \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{4} a^3 \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1}. \end{aligned}$$

On a $\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{V} = (2a - 3x, 3y, 0)$ qui est de divergence nulle. Le disque D_λ associé à C_λ admet pour paramétrisation :

$$x = t \sin^2 \theta, \quad y = t \operatorname{sh} \omega \sin^2 \theta, \quad z = t \operatorname{ch} \omega \sin \theta \cos \theta \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq a \quad \text{et} \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\begin{aligned} dx &= \sin^2 \theta \, dt + t \sin 2\theta \, d\theta, & dy &= \operatorname{sh} \omega \sin^2 \theta \, dt + t \operatorname{sh} \omega \sin 2\theta \, d\theta \\ dz &= \operatorname{ch} \omega \sin \theta \cos \theta \, dt + t \operatorname{ch} \omega \cos 2\theta \, d\theta, \end{aligned}$$

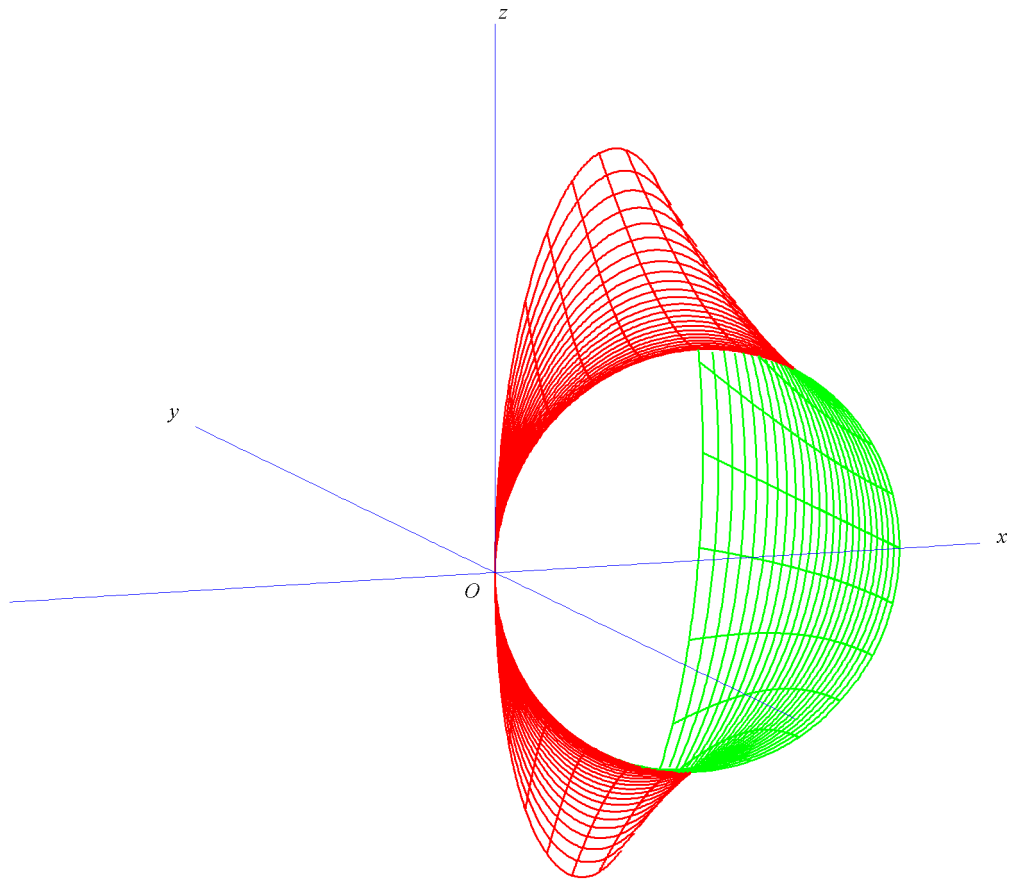
et le flux Φ_1 à travers ce disque vaut :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint_{D_\lambda} ((2a - 3x) \, dy \, dz + 3y \, dz \, dx) \\ &= \iint_{D_\lambda} ((2a - 3t \sin^2 \theta) t \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega (\sin^2 \theta \cos 2\theta - \sin \theta \cos \theta \sin 2\theta) \\ &\quad + 3t^2 \sin^2 \theta \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega (\sin \theta \cos \theta \sin 2\theta - \sin^2 \theta \cos 2\theta)) \, dt \, d\theta \\ &= \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega \iint_{D_\lambda} (-t(2a - 3t \sin^2 \theta) \sin^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta) \, dt \, d\theta \\ &= a^3 \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta) \, d\theta = -4a^3 \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \end{aligned}$$

d'où enfin le résultat attendu (au signe près) : $\Phi_1 = -\frac{\pi}{4} a^3 \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1}$. Le signe négatif est dû au

fait que le flux calculé est le flux *entrant*, car le vecteur normal associé aux jacobiens $\frac{D(x, y)}{D(t, \theta)}, \dots$ est orienté vers l'intérieur de la surface considérée.

Comme ce flux est nul si $\lambda = 0$ et que le champ \vec{V} est de divergence nulle, le résultat précédent donne le flux *sortant* à travers la portion de S comprise entre les plans $y = 0$ et $y = \lambda x$. Le calcul direct (non reproduit ici) confirme ce résultat.



Représentation de la partie de la surface $x(x^2 + y^2 + z^2) = a(x^2 + y^2)$ comprise entre les plans $y = 0$ et $y = \lambda x$ ($\lambda = \tan \theta, 3\pi$).