Chapitre 9 :

Transformation de Fourier des fonctions intégrables et de carré intégrable.

I Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Définition I.1 Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. La transformation de Fourier de u, notée $\hat{u}$, est la fonction définie partout sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, e^{-2i\pi(x \cdot y)}\, dx ,$$

où $(x \cdot y)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Remarquons que la définition ponctuelle de $\hat{u}$ a bien du sens partout en raison du théorème de comparaison.

Proposition I.2 La transformation de Fourier est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Démonstration La linéarité suit celle de l'intégrale. Pour la continuité, notons simplement que

$$|\hat{u}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|\, |e^{-2i\pi x \cdot y}|\, dx = \|u\|_{L^1}$$

de sorte que $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$ pour u qcq dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. ∎

Si nous dérivons formellement $\hat{u}$ par rapport à y nous obtenons par exemple

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,(-2i\pi x_1)\, e^{-2i\pi x \cdot y}\, dy .$$

Pour justifier l'interversion de la dérivée et de l'intégrale, il faut par exemple que $u.(-2i\pi x_1)$ soit dans L^1. Pour une dérivée seconde $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2}$, il nous faudrait $u.(4\pi^2 x_1^2) \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.
Cela suggère que la régularité de $\hat{u}$ est liée à la décroissance de u.
Inversement, si u est régulière, alors au moins formellement nous pouvons écrire, pour $y_1 \neq 0$,

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-2i\pi xy} dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \frac{-1}{2i\pi y_1} e^{-2i\pi xy} dx$$

$$= \frac{1}{2i\pi y_1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) e^{-2i\pi xy} dx.$$

Cela nous suggère cette fois que la décroissance de $\hat{u}$ est liée à la régularité de u.
Introduisons dès lors la classe de Schwartz, qui possède toutes ces propriétés

Définition I.3 Une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ appartient à l'espace de Schwartz, noté $S(\mathbb{R}^N)$, si elle est indéfiniment dérivable et si n'importe quelle de ses dérivées décroît à l'infini plus rapidement que n'importe quel polynôme :

$$u \in S(\mathbb{R}^N) \text{ ssi } \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \forall \beta \in \mathbb{N}^N, \exists C(u,\alpha,\beta) > 0$$
$$\text{t.q. } \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha u| \leq C(u,\alpha,\beta).$$

Rappelons que pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, disons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, on désigne par $\partial^\alpha u$ la dérivée partielle

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{\sum \alpha_i} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ et on l'appelle la longueur de α.
De la même manière, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\beta \in \mathbb{N}^N$, $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdots x_N^{\beta_N} \in \mathbb{R}$.
Enfin, pour $c \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{N}^N$, on note $c^\gamma := c^{|\gamma|} \in \mathbb{C}$.
En utilisant la règle de Leibniz :

$$\forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,$$

$$\partial^\alpha (u \cdot v) = \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbb{N}^N \\ \beta + \gamma = \alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\, \gamma!} \partial^\beta u \, \partial^\gamma v$$

avec $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ (et idem pour $\beta!, \gamma!$), le lecteur vérifiera la

<u>Proposition I.4</u> Pour $u, v \in S(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$, $u v \in S(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha u \in S(\mathbb{R}^N)$ et $Pu \in S(\mathbb{R}^N)$.

Remarquons aussi que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \subset S(\mathbb{R}^N)$.
La fonction $x \longmapsto e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Nous disposons maintenant d'un bon cadre pour démontrer la

Proposition I.5 Soit $u \in S(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, alors

$$\partial^\alpha \hat{u}(y) = \widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N$$
$$\widehat{\partial^\alpha u}(y) = (2i\pi y)^\alpha \hat{u}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Démonstration Comme mentionné précédemment, il suffit dans le premier cas de dériver la définition de $\hat{u}$ et dans le second d'intégrer par parties. Dans les deux cas, le fait que $u \in S(\mathbb{R}^N)$ permet de justifier l'opération (majorante intégrable et terme de bord à l'infini égal à zéro). ∎

Nous pouvons maintenant améliorer la Proposition I.2 et démontrer le

Théorème I.6 (de Riemann - Lebesgue)

La transformation de Fourier est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

[Rappelons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est l'adhérence de $K(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $B\mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, de manière équivalente,

$$u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ ssi } \begin{cases} u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ et} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N \text{ compact t.q.} \\ |u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus K_\varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration La Proposition I.5 nous assure que si $u \in S(\mathbb{R}^N)$ alors $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Si $u \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, par le théorème de densité il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ qui converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u. Par la Proposition I.2, $(\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ vers $\hat{u}$. Comme $\hat{u}_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ pour chaque n et que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est fermé dans $L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ la conclusion suit. ∎

La propriété simple suivante est d'une grande utilité.

<u>Proposition I.7</u> Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \hat{v}(x)\, dx .$$

<u>Démonstration</u> Remarquons d'abord que si $u, v \in L^1$, $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty$ et ainsi $\hat{u} v$, $u\hat{v} \in L^1$ et les intégrales ci-dessus sont bien définies.
On écrit alors, par les théorèmes de Tonelli et de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(y)\, v(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dy\, dx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^N \mathbb{R}^N} u(y)\, v(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\, \hat{v}(y)\, dy .$$ ∎

La transformation de Fourier jouit de propriétés remarquables relativement au groupe des translations et des dilatations.

<u>Définition I.8</u> Si $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, pour $a \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on définit la translatée par a de u et la dilatée par λ de u comme

$$(\tau_a u)(x) := u(x-a) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$
$$(\partial_\lambda u)(x) := u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

<u>Lemme I.9</u> Si $u \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a

$$\widehat{\tau_a u}(y) = e^{-2i\pi(a.y)} \hat{u}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N$$
$$\widehat{\partial_\lambda u}(y) = |\lambda|^N \partial_{1/\lambda} \hat{u}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

<u>Démonstration</u> On a, par définition

$$\widehat{\tau_a u}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_a u)(x) e^{-2i\pi x.y} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-a) e^{-2i\pi xy} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(z) e^{-2i\pi(z+a).y} dz = e^{-2i\pi a.y} \int_{\mathbb{R}^N} u(z) e^{-2i\pi z.y} dz$$
$$= e^{-2i\pi ay} \hat{u}(y).$$

De même,

$$\widehat{\partial_\lambda u}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-2i\pi xy}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(z)\, e^{-2i\pi \lambda z y} \frac{dz}{|\lambda|^{-N}}$$

$$= |\lambda|^N \int_{\mathbb{R}^N} u(z)\, e^{-2i\pi z(\lambda y)}\, dz$$

$$= |\lambda|^N \hat{u}(\lambda y) = |\lambda|^N \partial_{1/\lambda} \hat{u}(y). \quad \blacksquare$$

<u>Corollaire I.10</u> La fonction $u(x) = e^{-\pi|x|^2}$ est laissée invariante par la transformation de Fourier.

<u>Démonstration</u> En effet, si α est un multi-indice de longueur 1, par les propriétés de l'exponentielle

$$\partial^\alpha u = (-2\pi x)^\alpha u .$$

Comme $u \in S(\mathbb{R}^N)$, nous pouvons prendre la transformée de Fourier des deux membres de l'égalité de sorte que

$$\widehat{\partial^\alpha u} = \widehat{(-2\pi x)^\alpha u},$$

ou encore, en tenant compte de la Proposition I.5,

$$(2i\pi y)^\alpha \hat{u} = -i\, \partial^\alpha \hat{u}$$

de sorte que

$$\partial^\alpha \hat{u} = (-2\pi y)^\alpha u .$$

Dès lors,

$$\partial^\alpha\left(\frac{\hat{u}}{u}\right) = \frac{(\partial^\alpha \hat{u}).u - (\partial^\alpha u)\hat{u}}{u^2} = \frac{0}{u^2} = 0 .$$

Comme α est quelconque de longueur 1, $\frac{\hat{u}}{u}$ est égale à une constante.

Comme $\left(\widehat{\frac{u}{u}}\right)(0) = \frac{\hat{u}(0)}{u(0)} = \hat{u}(0)$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{0i} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2} dx = 1$$

la conclusion suit. ∎

Si $t > 0$, on déduit du Corollaire I.10 et de la Proposition I.9 que

$$\widehat{e^{-\pi t^2|x|^2}} = \widehat{\partial_{1/t} e^{-\pi|x|^2}} = t^{-N} e^{-\pi\frac{|x|^2}{t^2}}.$$

Nous arrivons au théorème principal de cette section, qui est le pendant du Théorème III.1 du Chapitre 8.

<u>Théorème I.11</u> (Formule d'inversion de Fourier)

Soit $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \cap \mathcal{BC}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ telle que $\hat{u} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.
Alors quel que soit $x \in \mathbb{R}^N$, $\hat{\hat{u}}(x) = u(-x)$.

<u>Démonstration</u> Par définition,

$$\hat{\hat{u}}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(y) e^{-2i\pi y \cdot x} dy.$$

Il n'est pas possible d'utiliser directement le passage du chapeau dans le membre de droite de l'égalité précédente, et ce parce que la fonction $y \longmapsto e^{-2i\pi y.x}$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.
Toutefois, comme $\hat{u} \in L^1$, il suit du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\hat{\hat{u}}(x) = \lim_{t \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(y) e^{-2i\pi x.y} e^{-\pi t^2 |y|^2} dy$$

car $e^{-\pi t^2 |y|^2}$ converge ponctuellement vers 1 et $|\hat{u}(y)|$ est une dominante intégrable.
Comme $e^{-\pi t^2 |y|^2} \in L^1$, on obtient maintenant

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(y) e^{-2i\pi xy} e^{-\pi t^2 |y|^2} dy = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\tau_x u}(y) e^{-\pi t^2 |y|^2} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \tau_x u(y) \widehat{e^{-\pi t^2 |y|^2}} dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(y-x) t^{-N} e^{-\pi \frac{|y|^2}{t^2}} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(tz - x) e^{-\pi |z|^2} dz$$

de sorte que

$$\hat{\hat{u}}(x) = \lim_{t \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^N} u(tz - x) e^{-\pi |z|^2} dz$$

$$= u(-x) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi |z|^2} dz = u(-x)$$

où l'on a utilisé le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec la majorante intégrable $z \longmapsto \|u\|_{L^\infty} e^{-\pi|z|^2}$ et où l'on a utilisé la continuité de u. La conclusion suit. ■

<u>Corollaire I.12</u> La transformation de Fourier est une bijection linéaire de $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

<u>Démonstration</u> Soit $u \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Montrons que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ fixés,

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} |y^\beta \partial^\alpha \hat{u}(y)| < +\infty.$$

Par la Proposition I.5, $\partial^\alpha \hat{u}(y) = \widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}(y)$ et dès lors

$$y^\beta \partial^\alpha \hat{u}(y) = y^\beta \widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}(y)$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^\beta} (2i\pi y)^\beta \widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}(y)$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^\beta} \widehat{\partial^\beta ((-2i\pi x)^\alpha u)}.$$

Comme $u \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, $\partial^\beta((-2i\pi x)^\alpha u) \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ par la Proposition I.4, de sorte que $\partial^\alpha((-2i\pi x)^\alpha u) \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, et donc $\widehat{\partial^\alpha((-2i\pi x)^\alpha u)} \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. La conclusion suit.
Nous avons montré que $u \in S(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \hat{u} \in S(\mathbb{R}^N)$.
On peut dès lors applique la formule d'inversion de Fourier dans $S(\mathbb{R}^N)$, de sorte que

$$\forall u \in S(\mathbb{R}^N), \quad \hat{\hat{\hat{\hat{u}}}} = u,$$

et par conséquent $u \longmapsto \hat{u}$ est bijective. ■

Corollaire I.13 Si $u \in S(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, alors

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Démonstration En effet, on a

$$\|\hat{u}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, \overline{\hat{u}(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x) \overline{\int_{\mathbb{R}^N} u(y) e^{-2i\pi xy} dy}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x) \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(y)\, e^{-2i\pi(-x)y} dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, \widehat{\bar{u}}(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, \widehat{\partial_{-1}\bar{u}}(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \widehat{\widehat{\partial_{-1}\bar{u}}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \partial_{-1}\partial_{-1}\bar{u}(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \bar{u}(x)\, dx = \|u\|_{L^2}^2,$$

ce qui termine la démonstration. ■

Nous allons maintenant étendre la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ à $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.
Notons que $L^2(\mathbb{R}^N) \not\subset L^1(\mathbb{R}^N)$ et $L^1(\mathbb{R}^N) \not\subset L^2(\mathbb{R}^N)$.

<u>Corollaire I.12 bis</u> Si $u, v \in S(\mathbb{R}^N)$ alors $u * v \in S(\mathbb{R}^N)$ et de plus,

i) $\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$

ii) $\hat{u} * \hat{v} = \widehat{u . v}$.

<u>Démonstration</u> On a, par définition du produit de convolution,

$$(\hat{u} * \hat{v})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi - y)\, \hat{v}(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_\xi \partial_{-1} \hat{u})(y)\, \hat{v}(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\tau_\xi \partial_{-1} \hat{u}}\,(y)\, v(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi \xi y}\, \widehat{\partial_{-1} \hat{u}}\,(y)\, v(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(y) v(y)\, e^{-2i\pi \xi y}\, dy = \widehat{uv}(\xi).$$

Par bijectivité de la transformée de Fourier sur S, $u = \hat{f}$ et $v = \hat{g}$ pour certains $f, g \in S(\mathbb{R}^N)$. Dès lors, en utilisant ii),

$$\widehat{u * v} = \widehat{\hat{f} * \hat{g}} = \hat{\hat{\widehat{fg}}} = (\partial_{-1} f)\,(\partial_{-1} g)$$
$$= \hat{u}\, \hat{v}$$

car $\partial_{-1} f = \hat{\hat{f}} = \hat{u}$ et idem pour g.

On déduit de i) que

$$u * v = \partial_{-1}\, \widehat{\hat{u} . \hat{v}}.$$

Comme $S(\mathbb{R}^N)$ est stable par transformation de Fourier, par multiplication, et bien sûr par ∂_{-1}, il s'en suit que $u * v \in S(\mathbb{R}^N)$.
La démonstration est terminée.

II Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable.

D'après le Corollaire I.13, la restriction de la transformation de Fourier à $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ est linéaire continue (et même unitaire) de $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.
Comme $S(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\| \ \|_2$ (en effet $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$), on déduit du théorème de prolongement qu'il existe une et une seule extension continue

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \mathcal{F}(u) \end{aligned}$$

telle que $\mathcal{F}(u) = \hat{u} \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^n)$.
On appelle $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
Il n'est pas immédiat a priori que

$$\mathcal{F}(u) = \hat{u} \qquad \text{pour } u \in (L^1 \cap L^2) \setminus S(\mathbb{R}^n).$$

Nous le vérifierons par la suite. Commençons par le

<u>Théorème II.1</u> La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection linéaire unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. De plus, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = \partial_{-1} u$$

<u>Démonstration</u> La conservation de la norme L^2 et la

formule d'inversion de Fourier sont vraies pour $u \in S(\mathbb{R}^N)$. Il suffit dès lors d'invoquer la densité de $S(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et de passer à la limite en utilisant la continuité de $\mathcal{F}$ pour la norme L^2. ■

<u>Proposition II.2</u> (Passage du "chapeau" dans L^2)
Soit $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \mathcal{F}(v)(x)\, dx.$$

<u>Démonstration</u> On utilise ici encore la densité de $S(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Si $u_n \xrightarrow{L^2} u$ et $v_n \xrightarrow{L^2} v$ avec $(u_n), (v_n) \subset S(\mathbb{R}^N)$, alors par le théorème de passage du chapeau dans L^1 on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u_n}(x)\, v_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_n(x)\, \widehat{v_n}(x)\, dx.$$

Comme $u_n, v_n \in S(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{u_n} = \mathcal{F}(u_n)$ et $\widehat{v_n} = \mathcal{F}(v_n)$. Il suffit dès lors de passer à la limite $n \to +\infty$ et d'utiliser la continuité de $\mathcal{F}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

<u>Corollaire II.3</u> Si $u \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, alors $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$.

<u>Démonstration</u> Soit $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ telle que $\chi_n = 1$ sur $B(0, n)$ et $0 \leq \chi_n \leq 1$ partout.

Pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, le produit $\chi_n . v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \subset S(\mathbb{R}^N)$.
Par les théorèmes du passage du chapeau (version L^1 et L^2), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\, \chi_n \overline{v} = \int_{\mathbb{R}^N} u\, \widehat{\chi_n \overline{v}} = \int_{\mathbb{R}^N} u\, \mathcal{F}(\chi_n \overline{v})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)\, \chi_n \overline{v},$$

de sorte que $\left((\hat{u} - \mathcal{F}(u))\chi_n , v \right)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$.

On en déduit que $(\hat{u} - \mathcal{F}(u))\chi_n \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}))^{\perp}$.
Mais $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans L^2, et par conséquent sont orthogonal est réduit à $\{0\}$.
Ainsi, $\hat{u}(x) = \mathcal{F}(u)(x)$ presque partout sur $B(0,n)$.
Comme n est quelconque la conclusion suit. ∎

<u>Corollaire II.4</u> (Identité de Plancherel)

Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$,

$$\|u\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} .$$

Plus généralement, pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(u)(x)\, \overline{\mathcal{F}(v)(x)}\, dx .$$

Maintenant que nous avons montré que l'extension $\mathcal{F}$ correspond au $\hat{}$ pour $u \in L^1 \cap L^2$, nous pouvons utiliser la même notation $\hat{u}$ pour $u \in L^1 \cup L^2$, et même $u \in L^1 + L^2$ (l'ensemble des fonctions pouvant s'écrire comme la somme d'une fonction de L^1 et d'une fonction de L^2).

III Application à la résolution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$.

La version modèle de l'équation de la chaleur s'écrit (avec donnée initiale u_0)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases},$$

où $u \equiv u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et

$$\Delta u(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x,t).$$

Considérons, au moins formellement pour l'instant, la transformée de Fourier suivant la variable x de $u(t,x)$:

$$v(t,y) := \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\, e^{-2i\pi x.y}\, dx.$$

En utilisant la Proposition I.5, on obtient après avoir appliqué la transformation de Fourier à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t,y) = -4\pi^2 |y|^2 v(t,y) \\ v(0,y) = \widehat{u_0}(y) \end{cases}$$

L'avantage de cette dernière formulation est que pour y fixé (considéré comme paramètre), il s'agit là non plus d'une équation aux dérivées partielles mais d'une équation différentielle ordinaire, dont la solution s'écrit simplement

$$v(t,y) = \widehat{u_0}(y) \cdot e^{-4\pi^2|y|^2 t}.$$

Notons que si l'on pose $\rho(y) := e^{-\pi|y|^2}$,

alors
$$e^{-4\pi^2|y|^2 t} = \partial_{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}} \rho$$
$$= \partial_{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}} \widehat{\rho} \qquad (\text{car } \rho = \widehat{\rho})$$
$$= (4\pi t)^{-N/2} \cdot \widehat{\partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho}$$

de sorte que sur $u_0 \in S(\mathbb{R}^N)$, en utilisant le Corollaire I.12bis on obtient

$$v(t,y) = \widehat{u_0}(y) \cdot \widehat{\partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho}(y) \cdot (4\pi t)^{-N/2}$$
$$= \widehat{\left(u_0 * \partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho\right)}(y) \cdot (4\pi t)^{-N/2}.$$

Mais $v(t,\cdot) = \widehat{u(t,\cdot)}$, d'où par bijectivité de la transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^N)$,

$$u(t,x) = \left(u_0 * \left((4\pi t)^{-N/2} \partial_{\sqrt{4\pi t}} \rho\right)\right)(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, dy$$

Ayant "deviné" la forme de la solution, nous pouvons démontrer le

Théorème III.1 Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^N$ par

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

est indéfiniment différentiable en t et x sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^N$, de plus,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^N$$

et
$$\lim_{t \downarrow 0_+} \|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0 .$$

Démonstration Il suffit de remarquer que toutes les dérivées de la fonction $(t,x,y) \longmapsto \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ par rapport à t et/ou x (un nombre quelconque de fois) sont bornées sur $\mathbb{R}^N$, elles appartiennent ainsi à L^∞. Comme $u_0 \in L^1$ de son côté, on peut alors appliquer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre.
On calcule alors sans peine que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right) = 0$$

Pour ce qui est de la convergence vers la donnée initiale, on note par exemple que

$$\left| u(t,x) - u_0(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left[u_0(x-y) - u_0(x) \right] \right| \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy$$

et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - u_0(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x-y) - u_0(x)| \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy \, dx$$

$$\leq \int_{|y| \leq \delta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_y u_0 - u_0|(x) \, dx \right) \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy$$

$$+ \int_{|y| \geq \delta} \int_{\mathbb{R}^N} |\tau_y u_0 - u_0|(x) \, dx \; \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy$$

$$\leq \underbrace{\sup_{|y| \leq \delta} \| \tau_y u_0 - u_0 \|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{\to 0 \text{ qd } \delta \searrow 0} + 2 \|u_0\|_{L^1} \cdot \underbrace{\int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy}_{= \int_{|z| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi t}}} e^{-\pi |z|^2} dz \; \to 0 \text{ qd } t \searrow 0+}$$

par continuité des translations dans L^1

On fait d'abord tendre t vers 0, et ensuite δ. ■