

Corrigé

Questions de cours

1. Une base hilbertienne d'un espace de Hilbert X est une famille orthonormée et totale de X . On rappelle qu'une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est dite orthonormée si $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \forall i, j \in I$, et quelle est dite totale si le seul vecteur de X orthogonal à tous les $e_i, i \in I$, est le vecteur nul (ou de manière équivalente si l'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est dense dans X).

2.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, x^\beta \partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \right\}.$$

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ si } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, x^\beta \partial^\alpha (u_n - u) \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}).$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) = \{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C} \text{ linéaire et t.q. si } u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \text{ alors } T(u_n) \rightarrow T(u) \text{ dans } \mathbb{C} \}.$$

Exercice 1

1. Si A est symétrique alors pour $u \in X$ on a d'une part

$$(A(u), u) = (u, A(u))$$

par symétrie de A et d'autre part

$$(A(u), u) = \overline{(u, A(u))}$$

par hermitivité du produit scalaire. On déduit que $(A(u), u) = \overline{(A(u), u)}$ et par conséquent que $(A(u), u) \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $(A(u), u) \in \mathbb{R}$ quel que soit $u \in X$, alors pour $u, v \in X$ on a

$$(A(u), v) + (A(v), u) = (A(u+v), u+v) - (A(u), u) - (A(v), v) \in \mathbb{R}$$

de sorte que $Im(A(u), v) = Im(u, A(v))$ et

$$-i((A(u), v) - (A(v), u)) = (A(u+iv), u+iv) - (A(u), u) - (A(v), v) \in \mathbb{R}$$

de sorte que $Re(A(u), v) = Re(u, A(v))$. La conclusion suit.

2. Pour $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a, après k intégrations par parties,

$$(A^k(u), v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k}{dx^k} u(x) \overline{v(x)} dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{\frac{d^k}{dx^k} v(x)} dx$$

de sorte que A^k est symétrique si et seulement si k est pair.

Exercice 2

1. Par hypothèse, pour $y \in \tilde{Y}$ fixé, l'application $x \mapsto a(x, y)$ est linéaire continue de X dans \mathbb{C} . Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $T(y) \in X$ tel que

$$a(x, y) = (x, T(y))_X \quad \forall x \in X.$$

Comme a est bilinéaire, on déduit que $y \mapsto T(y)$ est linéaire de \tilde{Y} dans X .

2. Si $T(y) = 0$, alors $a(x, y) = 0$ quel que soit $x \in X$. En particulier, pour $x = y$ on obtient

$$\alpha \|y\|_Y^2 \leq a(y, y) = 0,$$

de sorte que $y = 0$.

3. R étant l'inverse d'une application linéaire, elle est linéaire. Enfin, pour $z = T(y) \in Z$, on a

$$\begin{aligned} \|R(z)\|_Y^2 &= \|R(T(y))\|_Y^2 = \|y\|_Y^2 \leq \frac{1}{\alpha} a(y, y) = \frac{1}{\alpha} (y, T(y))_X \\ &= \frac{1}{\alpha} (R(z), z)_X \leq \frac{1}{\alpha} \|R(z)\|_X \|z\|_X \leq \frac{C}{\alpha} \|R(z)\|_Y \|z\|_X. \end{aligned}$$

Dès lors, après simplification

$$\|R(z)\|_Y \leq \frac{C}{\alpha} \|z\|_X,$$

ce qui montre la continuité de R .

4. Z est dense dans \bar{Z} et Y est complet par hypothèse. Il existe donc (cfr. cours) un unique prolongement linéaire continu de R à \bar{Z} , à valeurs dans Y .

5. Pour les mêmes raisons qu'au point 4.

6. C'est le théorème de représentation de Riesz dans Y , appliqué à la forme linéaire continue \bar{f} .

7. La composition de deux applications linéaires continues est une application linéaire continue.

8. Pour $y \in Y$ fixé, l'application $x \mapsto (A(x), y)_Y$ est une forme linéaire continue de X dans \mathbb{R} . Par le théorème de représentation de Riesz il existe $A^*(y) \in X$ tel que

$$(A(x), y)_Y = (x, A^*(y))_X \quad \forall x \in X.$$

De la bilinéarité du produit scalaire on déduit la linéarité de l'application $y \mapsto A^*(y)$, et enfin

$$\|A^*(y)\|_X^2 = (A^*(y), A^*(y))_X = (A(A^*(y)), y)_Y \leq \|A(A^*(y))\|_Y \|y\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|A^*(y)\|_X \|y\|_Y,$$

d'où

$$\|A^*(y)\|_X \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|y\|_Y$$

ce qui montre que $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$.

9. On a, pour $y \in \tilde{Y}$,

$$a(x^*, y) = (x^*, T(y))_X = (h, (\bar{R} \circ P)(T(y)))_Y = (h, \bar{R}(T(y)))_Y = (h, y)_Y = f(y),$$

où on a utilisé le fait que $P(T(y)) = T(y)$ puisque $T(y) \in Z$.

Exercice 3

1. On vérifie sans peine que $(1+x^2)^{-1}u_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ et par conséquent $u_\alpha \in Z \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (cfr. cours). Dès lors, on a aussi $\hat{u}_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puisque la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Il suffit de décomposer u_α en choisissant (par exemple) $v_\alpha := u_\alpha \cdot 1_{B(0,1)}$ et $w_\alpha = u_\alpha \cdot (1 - 1_{B(0,1)})$.

3. On a $\hat{u}_\alpha = \hat{v}_\alpha + \hat{w}_\alpha$ avec $\hat{v}_\alpha \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (Riemann - Lebesgue) et $w_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ (Plancherel).

4. On écrit, pour presque tout x ,

$$\hat{u}_\alpha\left(\frac{x}{\lambda}\right) = (\partial_\lambda \hat{u}_\alpha)(x) = \lambda \mathcal{F}(\partial_{1/\lambda} u_\alpha)(x) = \lambda \mathcal{F}(|\lambda|^{-\alpha} u_\alpha)(x) = |\lambda|^{1-\alpha} \hat{u}_\alpha(x).$$

5. On le déduit de 4 en choisissant $\lambda = x$, de sorte que $c_\alpha = \hat{u}_\alpha(1)$.

6. Si $1/2 < \alpha < 1$, alors $0 < 1 - \alpha < 1/2$ et par le point 5. et la formule d'inversion de Fourier on obtient

$$\mathcal{F}(|x|^{-\alpha}) = c_{1-\alpha}^{-1} \mathcal{F}(\hat{u}_{1-\alpha}) = c_{1-\alpha}^{-1} \partial_{-1} u_{1-\alpha} = c_{1-\alpha}^{-1} |x|^{\alpha-1}.$$

7. On vérifie que $u_\alpha \rightarrow u_{\frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lorsque $\alpha \rightarrow 1/2$, et par continuité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on déduit que $\hat{u}_\alpha \rightarrow \hat{u}_{\frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lorsque $\alpha \rightarrow 1/2$. Il suit alors des points 5. et 6. que $c_{\frac{1}{2}} = 1$ et que $\hat{u}_{\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2}}$.