Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
M1 Mathématiques

Examen : Bases d'Analyse Fonctionnelle
12 décembre 2011, de 14h00 à 17h00

Questions de cours

1. Donner la définition d'une base hilbertienne d'un espace de Hilbert X.
2. Donner la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Sous quelles conditions une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge-t-elle vers $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$? Donner la définition de l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 1 Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$. On rappelle qu'une application linéaire A de X dans X (non nécessairement continue) est symétrique si

$$(A(u), v) = (u, A(v)) \qquad \forall\, u, v \in X.$$

1. Montrer que A est symétrique si et seulement si

$$(A(u), u) \in \mathbb{R} \qquad \forall\, u \in X.$$

Indication : Imiter les identités de polarisation.

2. On considère ici le cas $X = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on munit du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$(u, v) := \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)}\, dx \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ l'application linéaire

$$A_k : X \to X,\ u \mapsto \frac{d^k}{dx^k} u$$

est-elle symétrique ?

Exercice 2 Soient X et Y deux espaces de Hilbert réels munis de produits scalaires notés respectivement $(\cdot,\cdot)_X$ et $(\cdot,\cdot)_Y$. Soit $\tilde{Y}$ un sous-espace vectoriel de Y dense dans Y. On munit $\tilde{Y}$ du produit scalaire de Y, ce qui en fait un espace pré-hilbertien. On fait l'hypothèse que $Y \subset X$ et il qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y\|_X \le C\|y\|_Y \qquad \forall\, y \in Y,$$

où $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ désignent les normes induites par les produits scalaires de X et Y.

On se donne une forme linéaire continue $f \in \tilde{Y}'$ et une forme bilinéaire $a : X \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, y \in \tilde{Y},\ \exists C_y > 0 \text{ t.q. } |a(x, y)| \le C_y \|x\|_X\ \forall\, x \in X.$$

(autrement dit chacune des applications partielles $x \mapsto a(x, y)$ est un élément du dual X')

et telle que

$$\exists \alpha > 0,\ a(y, y) \ge \alpha \|y\|_Y^2\ \forall\, y \in \tilde{Y}.$$

(on dit que a est coercitive sur $\tilde{Y}$).

Le but de l'exercice est de démontrer la variante suivante du Théorème de Lax-Milgram :

$$\exists x_* \in X \text{ t.q. } a(x_*, y) = f(y) \quad \forall\, y \in \tilde{Y}. \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une application linéaire $T : \tilde{Y} \to X$ telle que

$$a(x,y) = (x, T(y))_X \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in \tilde{Y}.$$

2. Montrer que T est injective.

Dans la suite, on désigne par Z l'image par T de $\tilde{Y}$, que l'on munit du produit scalaire de X. On désigne par $R : Z \to \tilde{Y}$ l'inverse à gauche de T, autrement dit

$$R(T(y)) = y \quad \forall\, y \in \tilde{Y}.$$

3. Montrer que $R \in \mathcal{L}(Z, \tilde{Y})$, l'espace des applications linéaires continues de Z dans $\tilde{Y}$.
4. Déduire qu'il existe une unique application linéaire continue $\bar{R} : \bar{Z} \to Y$ qui prolonge R. *(Ici, $\bar{Z}$ désigne l'adhérence de Z dans X)*
5. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\bar{f} \in Y'$ qui prolonge f.
6. Montrer qu'il existe un unique $h \in Y$ tel que

$$\bar{f}(y) = (y, h)_Y \quad \forall\, y \in Y.$$

7. Soit P la projection orthogonale de X sur $\bar{Z}$. Montrer que $\bar{R} \circ P \in \mathcal{L}(X, Y)$.
8. Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ quelconque. Montrer qu'il existe $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ telle que

$$(A(x), y)_Y = (x, A^*(y))_X \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

   (On dit que A^* est l'adjoint de A)
9. Montrer que $x_* := (\bar{R} \circ P)^*(h)$ fournit une solution du problème (1).

Exercice 3 Soit $0 < \alpha < 1$, et $u_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u_\alpha(x) := \begin{cases} |x|^{-\alpha} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $u_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (au sens de l'injection canonique) et en déduire que $\hat{u}_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, où $\hat{u}_\alpha$ désigne la transformée de Fourier de u_α.
2. Montrer que si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, il existe $v_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ et $w_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $u_\alpha = v_\alpha + w_\alpha$ presque partout.
3. Déduire que pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\hat{u}_\alpha \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$. En particulier, $\hat{u}_\alpha$ est une distribution tempérée associée à une fonction, que par abus on note aussi $\hat{u}_\alpha$.
4. En remarquant que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_\alpha(\frac{x}{\lambda}) = |\lambda|^\alpha u_\alpha(x),$$

   montrer que pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixés,

$$\hat{u}_\alpha(\frac{x}{\lambda}) = |\lambda|^{1-\alpha} \hat{u}_\alpha(x) \qquad \text{presque partout.}$$

5. Déduire que pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, il existe une constante $c_\alpha \in \mathbb{C}$ telle que

$$\hat{u}_\alpha(x) = c_\alpha |x|^{\alpha-1} \quad \text{presque partout.}$$

6. En utilisant la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, étendre ce dernier résultat au cas où $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
7. **(Bonus)** Montrer que $\hat{u}_{\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2}}$.