

Bases d'Analyse Fonctionnelle - MM005
 Master 1 UPMC
 Partiel du 28/10/2011 - Corrigé

Question de cours :

Le théorème d'Ascoli affirme la chose suivante. Soit (X_1, d_1) est un espace métrique compact et (X_2, d_2) un espace métrique complet. Soit \mathcal{A} un sous-ensemble de $\mathcal{C}(X_1; X_2)$ tel que

1. \mathcal{A} est uniformément équi-continu, au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_1(x, y) < \delta$, alors

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon;$$

2. \mathcal{A} est ponctuellement relativement compact, au sens où pour tout $x \in X_1$, l'ensemble

$$\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$$

est compact dans X_2 .

Alors $\overline{\mathcal{A}}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}(X_1; X_2)$.

Exercice 1 :

1. Soit $h_0 > 0$ suffisamment petit pour que pour $0 < h \leq h_0$, $|u(y+h) - u(y)| \leq h(|U'_+(y)| + 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $y \in [-n, n]$, pour que $|U'_+(y)| + 1 \leq n$ et pour que $2\|u\|_{L^\infty} \leq nh_0$. Alors, pour tout $h > 0$, on a $|u(y+h) - u(y)| \leq nh$, ce qui implique que $u \in F_n$.
2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans F_n convergeant uniformément vers $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Nous voulons montrer que u appartient à F_n . Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k \in [-n, n]$ tel que pour tout $h > 0$,

$$|u_k(y_k + h) - u_k(y_k)| \leq nh. \tag{1}$$

Comme $[-n, n]$ est compact il existe une sous-suite $(y_{k_i})_i$ de $(y_k)_k$ qui converge vers un certain $y \in [-n, n]$. Pour montrer que u appartient à F_n il suffit de montrer que pour tout $h > 0$, $|u(y+h) - u(y)| \leq nh$. Soit $\varepsilon > 0$ et $h > 0$. Par l'inégalité triangulaire on obtient

$$\begin{aligned} |u(y+h) - u(y)| &\leq |u(y+h) - u(y_{k_i} + h)| + |u(y_{k_i} + h) - u_{k_i}(y_{k_i} + h)| \\ &\quad + |u_{k_i}(y_{k_i} + h) - u_{k_i}(y_{k_i})| + |u_{k_i}(y) - u(y_{k_i})| + |u(y_{k_i}) - u(y)| \\ &\leq |u(y+h) - u(y_{k_i} + h)| + nh + 2\|u - u_{k_i}\|_{L^\infty} + |u(y_{k_i}) - u(y)|, \end{aligned}$$

où on a aussi utilisé (1). Puisque $(y_{k_i})_i$ converge vers y et que u est continue, on obtient

$$|u(y+h) - u(y)| \leq 4\varepsilon + nh.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était quelconque, on obtient que u appartient à F_n .

3. Comme U est uniformément continue sur $[-n, n + 1]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, y dans $[-n, n + 1]$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$, on a $|U(x) - U(y)| < \varepsilon$. Pour $k = 0, \dots, N := E(\frac{2n+1}{\delta})$, où E désigne la partie entière d'un nombre réel, on définit $x_k := -n + k\delta$. On définit aussi $x_{N+1} := n+1$ et finalement U_n sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$ comme la fonction affine reliant $(x_k, U(x_k))$ à $(x_{k+1}, U(x_{k+1}))$.
4. Le graphe est en dents de scie avec des maxima en $\frac{1}{2m}\mathbb{Z}$ égaux à $\frac{1}{2\sqrt{m}}$. La valeur absolue des dérivées à gauche et à droite est constante égale à \sqrt{m} .
5. Puisque $\frac{1}{2\sqrt{m}}$ converge vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$ on obtient que W_m converge vers 0 dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, lorsque $m \rightarrow +\infty$. De plus, par l'inégalité triangulaire sur les dérivées à droite et à gauche, on déduit que $U_n + W_m \notin F_n$ pour m suffisamment grand, en effet celles de U_n sont fixes (et donc bornées) alors que celles de W_n (égales à \sqrt{m}) divergent.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le point 3. à $U \in F_n$. Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe U_n telle que $\|U - U_n\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$. Il suit alors du point 5. que pour m suffisamment grand, $U_n + W_m \notin F_n$ et $\|W_m\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$. Par l'inégalité du triangle on obtient $\|U - (U_n + W_m)\|_{L^\infty} \leq 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque il s'ensuit que F_n est d'intérieur vide.
7. Comme l'espace $\mathcal{BC}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ est complet, on peut appliquer le théorème de Baire et déduire de la réponse au point précédent que $\text{Int } \cup_n F_n = \emptyset$. D'après le point 1., l'ensemble des fonctions de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ admettant une dérivée à droite en au moins un point est inclus dans $\cup_n F_n$. Par conséquent il est d'intérieur vide lui aussi.

Exercice 2 :

1. On définit par exemple $F := \{(m, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} / m \geq 1 \text{ et } 0 \leq j \leq m - 1\}$, and pour chaque $(m, j) \in F$, $u_{m,j} := \mathbf{1}_{[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}]}$, où le "1" désigne la fonction caractéristique (du sous-ensemble en indice). On définit alors $f : F \rightarrow \mathbb{N}^*$ by $f(m, j) = j + 1 + \frac{m(m-1)}{2}$ et on observe que f est une bijection, ce qui définit de manière univoque une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la relation $v_n := u_{m,j}$ où $n = f(m, j)$. Cette suite répond à la question.
2. Par changement de variable dans les intégrales on observe d'abord que pour tout $t > 0$, $\|G_t\|_1 = 1$. Il s'ensuit alors de l'inégalité de Young que $G_t * u \in L^1(\mathbb{R}, dx) \cap L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ et que

$$\|G_t * u\|_1 \leq \|G_t\|_1 \|u\|_1 = \|u\|_1 \text{ et } \|G_t * u\|_\infty \leq \|G_t\|_\infty \|u\|_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|u\|_1.$$

Il reste à montrer que $G_t * u$ est continue. Soient x, x' dans \mathbb{R} . Dès lors

$$(G_t * u)(x) - (G_t * u)(x') = \int_{\mathbb{R}} \left(G_t(x-y) - G_t(x'-y) \right) u(y) dy \rightarrow 0 \quad (2)$$

quand $x - x' \rightarrow 0$, par le théorème de convergence dominée, et puisque $G_t \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.

3. Puisque G_t possède des limites pour $x \rightarrow \pm\infty$, elle n'est pas seulement continue mais aussi uniformément continue. Soit ρ_t un module de continuité uniforme pour G_t , au sens où $|G_t(x) - G_t(x')| \leq \rho_t(|x - x'|)$ quels que soient $x, x' \in \mathbb{R}$. Alors par (2) on a

$$|(G_t * u)(x) - (G_t * u)(x')| \leq \|u\|_1 \rho_t(|x - x'|) \leq \rho_t(|x - x'|),$$

pour tout $u \in B$. Dès lors la famille des $G_t * u$ avec $u \in B$ est équicontinue. D'autre part, une borne ponctuelle a déjà été obtenue dans le point précédent. Considérant alors les restrictions à un sous-ensemble compact de \mathbb{R} , en l'occurrence $[-1, 1]$, toutes les hypothèses du théorème d'Ascoli sont vérifiées. On obtient donc que l'ensemble des restrictions à $[-1, 1]$ des fonctions $G_t * u$ où u parcourt B est relativement compact dans $\mathcal{BC}([-1, 1], \mathbb{R})$.