

Question de cours Énoncer le Théorème d'Ascoli.

Exercice 1 On désigne par $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de la norme uniforme

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \quad \text{pour } u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Pour $n \geq 0$ fixé, on définit le sous-ensemble

$$F_n := \{u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists x \in [-n, n], \forall h > 0, |u(x+h) - u(x)| \leq nh\}.$$

1. Soit $U \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possédant une dérivée à droite en au moins un point de \mathbb{R} , au sens où il existe $y \in \mathbb{R}$ t.q.

$$U'_+(y) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{U(y+h) - U(y)}{h} \text{ existe.}$$

Montrer qu'il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $U \in F_n$.

2. Montrer que chaque F_n est fermé dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(Indication : si $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset F_n$ converge vers $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérer une suite $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ fournie par la définition de F_n et utiliser la compacité de $[-n, n]$ pour construire un y permettant de s'assurer que $u \in F_n$.)
3. Soit $U \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $U_n \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
 - $U(x) = U_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus]-n, n+1[$,
 - U_n est affine par morceaux sur $[-n, n+1]$,
 - $\|U - U_n\|_\infty \leq \varepsilon$.

Remarquer qu'une telle fonction U_n est dérivable à droite partout sur $[-n, n]$ et que sa dérivée à droite est bornée en valeur absolue sur $[-n, n]$.

4. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $W_m \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$W_m(x) := \sqrt{m} \text{dist}(x, m^{-1}\mathbb{Z}),$$

où pour un sous-ensemble A de \mathbb{R} , on note $\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

Représenter schématiquement le graphe de W_m , montrer que W_m est dérivable à droite en tout point de \mathbb{R} , et calculer la valeur absolue de cette dérivée à droite.

5. Soit U_n construite telle qu'au point 3. Montrer que la suite $(U_n + W_m)_{m \geq 1}$ converge dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vers U_n et que pour tout m suffisamment grand on a $U_n + W_m \notin F_n$.
6. Dédire des points 3. et 5. que chaque F_n est d'intérieur vide dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. Conclure que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possédant une dérivée à droite en au moins un point de \mathbb{R} est d'intérieur vide dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2

1. Exhiber une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1([0, 1], dx)$ qui converge dans $L^1([0, 1], dx)$ vers la fonction identiquement nulle mais telle que pour aucun $x \in [0, 1]$ la suite réelle $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit convergente.

2. Soit $t > 0$ et G_t la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, le produit de convolution $G_t * u$ est bien défini et que $G_t * u \in L^1(\mathbb{R}, dx) \cap \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Estimer $\|G_t * u\|_1$ et $\|G_t * u\|_\infty$ uniquement en termes de $\|u\|_1$.

(On pourra utiliser le fait que $\|G_t\|_1 = 1$.)

3. (Bonus) Pour $t > 0$ fixé, montrer que si B désigne la boule unité de $L^1(\mathbb{R}, dx)$ alors la restriction des fonctions de $\{G_t * u, u \in B\}$ à l'intervalle $[-1, 1]$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{BC}([-1, 1], \mathbb{R})$.